博士論文

原子集団-光子間における多次元エンタングルメント

07D02010
井上遼太郎

東京工業大学 理工学研究科 物性物理学専攻

2010 年 1 月

目次

図目次

第 1 章

序論

量子力学は，原子サイズのミクロなシステムを記述するために生まれた．一方で，マクロなスケールで生きる我々が日常のスケールで経験する物事は古典力学で十分に記述できることに加えて，量子力学の予言がそれに反することがしばしばある．そのために，量子力学はミクロな世界を，古典力学はマクロな世界をそれぞれ記述するものであるという固定概念が形成されているように思われる．しかし，近年の実験技術の進展にともなって，量子力学で説明せざるを得ない結果がマクロなスケールでも確認されている．さらに，我々の経験事実に反するように思われる現象のひとつである「非局所相関」も実験的に精査され，量子力学の予言が十分な信頼性で肯定される結果となっている．このような状況を鑑みて，現在では量子力学は「物理的な理論を構成する数学的な規則・枠組み」と見なされるのが一般的である．この意味で様々なシステムに量子力学が適用され，「量子—」と呼ばれるそれらの分野では精力的な基礎研究が進められている．例えば量子電磁力学では，電磁場と原子との相互作用の記述に量子力学を適用し，実験結果と理論的な予測とが非常に高い精度で一致を見せている [1]．また，量子光学では，単一光子数状態やスクイーズド状態のような，古典的には表現できない種類の光の性質を正しく記述することに成功している [2]．

量子力学が予言する，我々の経験事実とは反するように思われる現象—例えば「非局所相関」—を積極的に利用することで，古典的には実現不可能と思われる革新的な技術を目指した基礎研究も進展している．特に量子情報処理の分野では，次に列挙するような新しい応用が注目を集めている [3]．技術的な関心を集めていることは言うまでもないが，これらの応用に関する研究は，量子力学の基礎的な枠組みに由来している点で，例えば情報を引き出す操作が及ぼす状態への影響のような，量子力学の根本的な問題にアプローチするひとつの手段としても目されている．

量子暗号

重ね合わせの原理やエンタングルメントを用いた盗聴不可能な通信プロトコル

量子テレポーテーション

未知の量子状態のエンタングルメントを用いた転送

量子コンピューティング

重ね合わせの原理やエンタングルメントを用いた高速 (並列) 計算手法

これらの応用にあたって特に重要なリソースと考えられているのが，エンタングルメントである．

エンタングルメントとは，量子力学の枠組みで保存則を自然に解釈した帰結として得られる，粒子間の相関である．この相関の特異性は Einstein らによって量子力学黎明期に見出され，量子力学を最終理論として受け入れられない根拠として示された [4]．Einstein らの指摘の意義は，物理量と測定値，さらには状態が一対一対応すべきであろうという「実在」の仮定―あらゆる古典論では暗黙に仮定されており，量子力学はそうでない場合も記述できるように構成されている―が我々の世界を正しく記述する上で必要か，という問題提起を行った点にある．指摘が行われた当時は主観的なものでしかなかったこの問題は，Bell らによって科学的に判断しうる問題であることが示され [5,6]，Aspect らの実験によって量子力学の予言が正しいことが示される結果となった [7,8]．Aspect らが示したのは，操作およびその影響の局所性と前述の「実在」を仮定した場合に導かれる Bell の不等式の破れである．すなわち，もし我々が量子力学に対する，あるいはこの世界に対する直感的な理解をより深めたいと願うなら，「局所性」と「実在性」のどちらか，あるいは両方を捨て去らねばならないことが明らかになった．この結果はまた，これまでのあらゆる古典的理論が，「局所性」と「実在性」という本来不要であるかもしれない仮定によって制限されてしまっていたことを意味する．つまり，量子力学の枠組みを用いて拡張された理論は，古典的には実現不可能と思われていた革新的な技術を提供する可能性がある．これを最も直接的に，積極的に利用して発展してきた分野のひとつが量子情報理論である．

Schrödinger や Heisenberg により定式化された初期の量子力学では，特に測定に関して不備があったことが知られている．その後，Neumann によって測定の部分も含めて線形代数を基礎とした定式化がなされた．今日の，特に量子情報理論に関連した量子力学の取り扱いにおいては，専ら Neumann の枠組み (例えば，[3]) が利用されている．1960 年代に入ってから，Stratonovich, Helstrom, Gordon らによって，通信過程を量子力学的

に記述する試みが提案され，量子情報理論 [9] が誕生した．

量子情報理論に言及する前に，古典情報理論の礎を築いた Shannon の仕事 [10] に触れておきたい．我々は日常的にインターネットを利用しているが，その通信路は絶えずノイズにさらされており，本来であれば情報がノイズによって乱されてしまう可能性を危惧しなければならないように直感的には思われる．しかし，そのような危険は現実には殆ど回避されている．これは，0 や 1 という情報を送る代わりに，000 や 111 のように冗長化した情報を送ることによって，ノイズがあっても受信側で正しい情報を推測できるようなプロトコルを用いていると考えることで理解できる．ただし，このような単純な符号化では，ノイズによる誤り確率をゼロにするためには冗長度を無限に大きくすることが必要だろう．つまり，正しい情報が推測できる可能性と通信速度とがトレードオフになってしまうように思える．1948 年に Shannon によって与えられた通信路符号化定理は，この問題に対する驚くべき解決策を提示した．それは，1bit あたりの誤り確率がある一定値以下であれば，複数の bit にまたがる符号化，複合化を考えることで通信速度を落とすことなく全体の誤り確率をいくらでも小さくできるというものである．この際の通信路速度の限界は通信路容量と呼ばれる．

黎明期の量子情報理論で取り扱われたのは，送りたい（古典）メッセージを量子状態へ変換（符号化）した後に量子通信路を用いて送信し，受信先では量子測定によって受信過程と復号化とを同時に行うという，古典的なメッセージを量子通信路を用いて伝送するもの（古典-量子通信路）であった．1970 年代には，Holevo によって古典-量子通信路における通信速度の限界が与えられた．量子通信路を議論するにあたっては，量子測定過程における状態変化について十分な知識が必要であるが，これの厳密な数学的定式化 [11] は小澤によって 1980 年代初めになされた．同時期に，Bennett と Brassard によって，量子暗号システム [12] が提案され*1．1990 年代に入ると，エンタングルメントを積極的に用いた量子テレポーテーションや dense coding などのプロトコル [13, 14] が Bennett, Wootters らによって提案されるようになった．これらを背景として，1990 年代後半には，量子状態の伝送（量子-量子通信路）が扱われるようになった [15]．1990 年代後半からは，エンタングルメントの定量評価に関する研究 [16–20] も盛んに行われるようになった．前述の情報理論で培われた手法との密接な関連から，理解が急速に進展した．

Bell の不等式の破れを最初に実証した 1981 年の Aspect らの実験 [7] は，カルシウム原子を用いたカスケード散乱で放出される，エンタングルした光子対を用いて行われた．しかし，熱的な原子集団でのカスケード散乱を用いて生成された光子対では，フラックスが原子集団の線幅に由来する原理的な制限を受けることと，原子間の衝突による相関の低下とが問題となり，応用的な研究を行うにあたってはその点を解決することが要求された．

*1 1970 年代に S. Wiesner によって提案されたものの再 “発明” であることが知られている [3, 12].

その後，非線形光学結晶を用いたパラメトリック下方変換 (PDC) によって生成される光子対で同様の相関が見出されることが，1995 年に Kwiat らによって報告された [21]．高いフラックスを持ち，十分に理想的な相関を持った光子対を比較的簡便な装置で容易に得られるこの技術は，現在に至るまでエンタングルメントを用いた量子情報処理の実験研究における主流となっている．例えば，1996 年の Dense coding [22] や 1997 年の量子テレポーテーション [23] の実証は，この技術を用いたものである．

近年では，量子状態をある地点に留め置くことができるデバイス—量子メモリ—が実用的な量子情報処理系に不可欠なデバイスであろうと考えられている．これを用いることで，エンタングルメントを効率的に長距離化するスキーム [24] や，たくさんの部分的なエンタングルメントから理想的なエンタングルメントを抽出するスキーム [25,26] を実現することが可能となる．また，究極的には，たくさんの量子メモリ間をエンタングルメントでつないだ量子ネットワーク [27] を構成することで，任意の量子計算や自由な通信が可能になるだろうと期待されている．しかし，現在主流となっている量子情報の担い手であるところの光子は，光速で伝播し環境からの擾乱に対して不敏感であるために信頼性が高い一方で，質量を持たないためにその状態を位置の関数として表すことができない．つまり，光子を単独で局在させることは原理的に不可能である．ただし，この問題は，原子などの質量を持った粒子と光子との相互作用を利用することで回避できる．光子以外の量子情報の担体としては，電子や原子核のスピン状態を利用するデバイスが多数提案され，広範な基礎研究が行われている．具体的には，原子 [28,29]，半導体量子ドット [30]，Josephson-junction デバイス [31] などが挙げられるが，光子との相互作用の観点から現在までに最も研究が進んでいるのは原子だろう．原子の有用性は，それが自然に存在することから，まったく同じ構造の物体がいつでも，何処でも，誰にでも入手できるために拡張性に富む点である．その一方で，原子と光子との相互作用を利用した応用を実現する上で大きな問題となるのは，両者の結合の大きさである．単一原子と単一光子との相互作用は非常に小さいが，共振器や原子集団を用いることでこれを実効的に増強することができる．

単一原子と単一光子との相互作用が小さいという問題を回避するための方策として，単一原子の代わりに複数個の原子を用いることは自然な発想だろう．原子集団は熱的な気体であり，各原子の状態につくグローバルな位相は乱雑であるが，集団を構成するすべての原子がまったく同じエネルギー準位に与えられた状況を仮定しよう．原子集団の状態は，すべての原子の状態の直積で記述される．量子情報処理の観点で興味があるのは，各準位にある原子の数と，準位間の相対位相である．すなわち，ある特定の重ね合わせ状態に準備した個々の原子の状態を量子情報の担体とみなし，その複素振幅を制御することで様々な処理を行いたい．複素振幅の相対値はグローバルな位相の影響を受けないため，単純に原子数を多くすることによって，単一原子の純粋状態にアクセスしているという描像を崩

すことなく実験的に検出可能な信号を得られる*2．しかし，現実的には，周囲の原子との衝突などといった我々に制御不能な現象が影響し，複素振幅が自然に変化してしまう．この自然な変化の影響は個々の原子で乱雑であるため，このような制御不能な現象が支配的である場合には，集団の状態を純粋状態とみなすことができなくなる．これらの現象に起因する，各準位の原子数の変化を縦緩和，相対位相の変化を横緩和と呼ぶ．原子集団を量子情報処理に利用する上で重要となるのは，縦横の各緩和が小さいことと，多数の原子を集めることを両立させることである．これは，高真空環境で特定の低温原子を多数集めることが可能な磁気光学トラップを用いて実現できる．この観点からは，希薄な（量子縮退していない）冷却原子集団こそが最適であると言えるだろう．

2001 年に Duan らによって提案された DLCZ スキーム [32] は，原子集団と光の集団相互作用を利用し，離れた原子集団間に効率的にエンタングルメントを生成するものである．これは，先に述べた量子ネットワークを実現する上で強力な手法であろうと目されている．DLCZ スキームの基礎となる，原子集団と光の集団相互作用は，PDC と同様の相互作用ハミルトニアンで記述される．PDC では光子の対を生成するのに対し，DLCZ スキームでは原子の集団スピンと光子とを対として生成する．PDC でよく研究されてきた光子対の相関との類似から，この集団スピンと光子とはエンタングルした状態となることが期待される．加えて，DLCZ スキームで生成される光子は，それが原子から散乱されることから容易にわかるように，原子の遷移に対して近共鳴で，PDC の場合と比較して狭線幅である．

DLCZ スキームの実現を目指した最初の実験の報告は，冷却 Cs 原子集団を用いた Kuzmich らによる 2003 年の論文 [33] である．ここでは，励起された集団スピンと光子の状態に対して理論的に期待されるような，粒子数に関する特徴的な相関が確認されたことが報告された．その後，2005 年になって原子集団-光子間の偏光自由度に関するエンタングルメント [34]，原子集団間のエネルギー (と時間) に関するエンタングルメント [35] がそれぞれ報告された．2006 年には，前者の偏光自由度に関するエンタングルメントが量子メモリ [28, 36] を利用して原子集団間のそれに拡張された [37]．これらの実験は，原子集団や光子が保持・運搬し得る自由度であるところのスピン角運動量，エネルギーのそれぞれに着目したものである．しかし，原子集団と光子の空間自由度という重要な側面についてはこれらの研究では議論されてこなかった．近年，量子情報をエンコードする対象として特に注目されている空間自由度が軌道角運動量状態である．

光が角運動量を持つこと自体は古くから指摘されており [38]，偏光を起源とする角運動量については早期に実験的な確認がなされている [39]．偏光以外に起源を持つ角運動量に

*2 もちろん，実際にアクセスしているのは混合状態である．例えば，準位間のエネルギー差に感度を持った測定を行う場合には，個々の原子の乱雑な運動が影響するためにこの描像は崩れる．

ついては，理論上の存在としては古くから知られていたものの，その実態は長い間明らかになってはいなかった．1992 年に Allen らが光の空間的な分布に由来する角運動量の存在を指摘 [40] し，以降，現実に利用可能な物理量として注目されるようになった [41–44]．このような，空間分布に基づく角運動量は軌道角運動量と呼ばれる．軌道角運動量を運び得るもっとも単純な光ビームは，「光渦」とも呼ばれる，Laguerre-Gaussian(LG) モードの光ビームである．自由空間を安定して伝播する光ビームの空間モードはヘルムホルツ方程式によって記述されるが，この方程式の (近軸近似のもとでの) 固有関数が LG モードである．すなわち，LG モードは安定に伝播する光ビームの空間モードを表現する完備な基底のひとつである [45]．

LG モードの軌道角運動量を特徴付けるのは，ビームの進行方向に垂直な平面内におけるスパイラルな位相分布である．波数ベクトルが等位相面に垂直であることを思い出すと，この光ビームを吸収する際に受け取る運動量は伝播方向に平行でなく，吸収に伴って伝播方向に垂直な平面内での運動が誘起される，すなわち，光ビームがその空間分布に応じた角運動量を伝播し得ることが直感的にイメージできる．光ビームの軌道角運動量は，それがスパイラルな位相分布に由来することの帰結[*3]として，量子化されていなければならない．スピン角運動量によって特徴付けられた 1 光子の状態は 2 次元ヒルベルト空間の基底を張るが，これと比較して，軌道角運動量によって特徴付けられた 1 光子の状態は無限次元ヒルベルト空間の基底であり，軌道角運動量状態を利用した量子情報処理では実質的に無限大の自由度が利用可能である．

軌道角運動量状態に関するエンタングルメントについての報告は，2001 年の Mair らによる先駆的な報告 [46] 以来，もっぱら PDC を用いて生成した光子対に関してなされてきた [47–51]．特に興味深いのは，3 次元に拡張された Bell の不等式 [52] について，2 次元の場合より強い「非局所相関」が見られる点 [47] である．また，実用的な量子情報処理を検討するにあたっても，多次元量子状態を用いることでノイズに対する頑強性が向上する可能性や，量子暗号の見地からはより安全な鍵配送が実現できることが理論的に指摘されている [53–55]．そのため，近年では多次元量子状態を用いた量子ネットワークについても検討がなされるようになってきた [56]．

原子集団の軌道角運動量状態に関する実験研究は，レーザー光の軌道角運動量状態に相当するものについては 4 光波混合の実験を通じて 2000 年以前から知られていた [57]．また，近年では前述の量子メモリの技術を利用して，原子集団の軌道角運動量状態におけるコヒーレンス時間に関する実験研究が進められている [58–60]．

本研究は冷却 ^{87}Rb 原子集団と単一光子との間で生成したエンタングルド状態につい

[*3] 光軸上の点以外のある点での位相を 0 としたときに，光軸まわりを一周してもとの点に戻ってきた場合，そこで位相は 2π の整数倍であることが要求される．

て，軌道角運動量の側面から定量的にエンタングルメントを評価することを目指して進められた．もっぱら光子対を用いて研究が進められてきた軌道角運動量に関するエンタングルメントに対して，本研究はそれを原子集団と結びつける架け橋となるものである．光を使った量子情報処理技術が急速に進展した背景には，光に対する測定技術の極めて高度な発達がある．本研究が目指したのは，光を用いた研究で培われた技術を原子系にも適用するためのインターフェースの確立・評価である．なんらかの自由度に関する原子集団-光子間でのエンタングルド状態が得られた暁には，光子に対してその自由度に感度を持った測定を行うことによって，エンタングルメントを介して原子集団の量子状態を制御することが可能となる．さらに，これまで主に古典的な側面ばかりが研究されてきた原子集団の軌道角運動量状態に対して，本研究では軌道角運動量を持った単一光子数状態に相当する量子的な状態の存在を実験的に見出した．これは，多次元量子情報処理において有用で新奇なリソースである．

本論文の構成は以下の通りである．

第 2 章　本研究で用いられる原子集団と光の集団相互作用に関する理論をまとめた．

第 3 章　生成される光子対の非古典性を評価した実験についてまとめた．

第 4 章　2 次元の測定基底を用いて原子集団と光子のエンタングルメントを評価し，エンタングルメントの存在を確かめた実験についてまとめた．

第 5 章　生成される光子対の一方で条件付けを行った場合に，もう一方の光子が十分に単一光子数状態に近いことを確かめた実験についてまとめた．

第 6 章　3 次元の測定基底を用いて原子集団と光子のエンタングルメントを評価し，エンタングルメントの多次元性を確かめた実験についてまとめた．

第 7 章　本研究全体のまとめを行った．

第 3 章，第 5 章の実験はそれ自体にも意義を持つが，本論文の中では，第 4 章，第 6 章の実験で評価したエンタングルメントが “単一”（集団）励起と “単一” 光子のそれであるという理論的なモデルの妥当性を示す役割を果たす．

また，集団相互作用以外の理論的な詳細，予備実験については，以下の付録にまとめた．

付録 A　光の軌道角運動量状態についてまとめた．

付録 B　相関関数を定義しその性質をまとめた．特に，光子数不敏感な通常の光子検出器を用いて測定される相関関数と，理論上の相関関数の差異を論じた．

付録 C　原子集団の状態を光子の状態に転写する際に用いられる，電磁誘起透明化についてまとめた．

付録 D　光子の軌道角運動量に感度を持った測定の手法を説明し，そのために用いた装置

の諸特性に関する予備実験についてまとめた.

付録 E　量子トモグラフィーの理論についてまとめた.

付録 F　エンタングルメントを評価するために必要な様々な量を定義し，閾値を与えた.

付録 G　実験の技術的な詳細をまとめた.

第 2 章

原子集団と光の集団相互作用

原子と光子とを相補的に利用した量子情報処理系を実現するにあたっては，原子と光子の相互作用が小さいという問題が解決されなければならない．そのためのアプローチとしては，共振器，原子集団を利用するものが知られている．直感的なイメージとしては，前者では実効的な光子数を大きくすることによって，後者では実効的な原子数を大きくすることによって，それぞれ相互作用の小ささを補償することができる．前者のアプローチで光子数を実効的に大きくできる背景には，対象となる原子と相互作用する電磁場のモードが共振器によって強く制限されるという物理がある．すなわち，多数の空間モードを利用した多次元エンタングルメントの評価を試みる本実験において，共振器を用いたアプローチは適切でない．一方で後者のアプローチでは，凝縮していない原子集団を用いるという前提のもとでは個々の原子にそれぞれ異なる位相が乱雑につくために，単純には 1 つの原子と同様には扱えない．しかし，個々の原子における基底/励起状態間の位相差だけが影響する本研究のセットアップにおいては，原子集団の任意の励起状態を純粋状態として取り扱うことが可能である．加えて，凝縮していない低温原子集団は多数個の原子を確保しつつ十分に希薄でもあるため，光との相互作用を強くしつつデコヒーレンスに大きく影響する原子間の相互作用については殆ど無視できる．すなわち，レーザー冷却された低温原子集団は，光と空間自由度に関する多次元量子状態をやり取りする媒体として極めて理想的なものである．

本章では，このような原子集団と光の集団相互作用を記述する実効的なハミルトニアンを書き下し，相互作用に原子数分の増強が期待できることを確かめるとともに，原子集団と光子の励起状態を導出する．

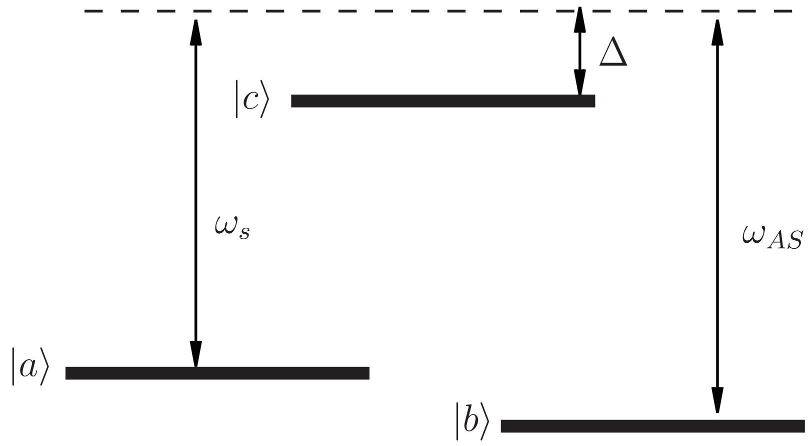

図 2.1　エネルギー準位

2.1　実効的なハミルトニアンの導出

図 2.1 のようなエネルギー準位を持った N 個の原子からなる原子集団と場の相互作用を考える．準位 $|\nu\rangle$ にある原子のエネルギーを E_ν と表す．以降，j を原子集団を構成する各原子に付けられたラベルとする．図 2.1 の 3 準位系はそれぞれ $\{|a_j\rangle, |c_j\rangle\}$，$\{|b_j\rangle, |c_j\rangle\}$ で記述される 2 つの 2 準位系の複合とみなす．ω_{AS}，ω_S は添え字の記号に対応する場の消滅演算子 $\hat{a}_{AS}$，$\hat{a}_S$ で特徴付けられる光の角周波数であり，$E_c - E_a = \hbar(\omega_S - \Delta)$，$E_c - E_b = \hbar(\omega_{AS} - \Delta)$ の関係がある．

このような光の場は，モード関数 $\boldsymbol{u}_\mu(\boldsymbol{r})$ を用いて，

$$\hat{\boldsymbol{E}}_\mu(\boldsymbol{r}) = i\sqrt{\frac{\hbar\omega_\mu}{2\epsilon_0}}\hat{a}_\mu \boldsymbol{u}_\mu(\boldsymbol{r}) + h.c. \tag{2.1.1}$$

と書ける．ここで，ϵ_0 は真空中の誘電率，$\hbar$ はプランク定数である．

電気双極子相互作用を考えると，相互作用ハミルトニアン $\hat{\mathscr{H}}_I$ は j 番目の原子の $|\nu_j\rangle \leftrightarrow |c_j\rangle$ 遷移に関する電気双極子モーメント演算子 $\hat{\boldsymbol{d}}_\nu^{(j)}$ を用いて

$$\hat{\mathscr{H}}_I = -\left(\sum_{j=1}^{N} \hat{\boldsymbol{d}}_a^{(j)} \cdot \hat{\boldsymbol{E}}_S + \sum_{j=1}^{N} \hat{\boldsymbol{d}}_b^{(j)} \cdot \hat{\boldsymbol{E}}_{AS}\right) \tag{2.1.2}$$

で与えられる．ここで，$\hat{\boldsymbol{d}}_\nu^{(j)}$ は j 番目の原子に関する恒等演算子

$$\hat{I}_\nu^{(j)} = |\nu_j\rangle\langle\nu_j| + |c_j\rangle\langle c_j| \tag{2.1.3}$$

を使って，$\langle \nu_j | \hat{\boldsymbol{d}}_\nu^{(j)} | \nu_j \rangle = 0$ に注意すれば，

$$
\begin{aligned}
\hat{\boldsymbol{d}}_\nu^{(j)} &= \hat{I}_\nu^{(j)} \hat{\boldsymbol{d}}_\nu^{(j)} \hat{I}_\nu^{(j)} \\
&= (|\nu_j\rangle\langle\nu_j| + |c_j\rangle\langle c_j|) \hat{\boldsymbol{d}}_\nu^{(j)} (|\nu_j\rangle\langle\nu_j| + |c_j\rangle\langle c_j|) \\
&= \langle c_j | \hat{\boldsymbol{d}}_\nu^{(j)} | \nu_j \rangle \, (|c_j\rangle\langle\nu_j|) + h.c.
\end{aligned}
\tag{2.1.4}
$$

と展開できる．したがって，

$$
\begin{aligned}
\hat{\boldsymbol{d}}_\nu^{(j)} \cdot \hat{\boldsymbol{E}}_\mu = i\sqrt{\frac{\hbar\omega_\mu}{2\epsilon_0}} \, & \langle c_j | \hat{\boldsymbol{d}}_\nu^{(j)} | \nu_j \rangle \, \boldsymbol{u}_\mu(\boldsymbol{r}) \hat{a}_\mu \, |c_j\rangle\langle\nu_j| \\
& + i\sqrt{\frac{\hbar\omega_\mu}{2\epsilon_0}} \langle \nu_j | \hat{\boldsymbol{d}}_\nu^{(j)} | c_j \rangle \, \boldsymbol{u}_\mu(\boldsymbol{r}) \hat{a}_\mu \, |\nu_j\rangle\langle c_j| \\
& \quad - i\sqrt{\frac{\hbar\omega_\mu}{2\epsilon_0}} \langle c_j | \hat{\boldsymbol{d}}_\nu^{(j)} | \nu_j \rangle \, \boldsymbol{u}_\mu^*(\boldsymbol{r}) \hat{a}_\mu^\dagger \, |c_j\rangle\langle\nu_j| \\
& \qquad - i\sqrt{\frac{\hbar\omega_\mu}{2\epsilon_0}} \langle \nu_j | \hat{\boldsymbol{d}}_\nu^{(j)} | c_j \rangle \, \boldsymbol{u}_\mu^*(\boldsymbol{r}) \hat{a}_\mu^\dagger \, |\nu_j\rangle\langle c_j| \\
\simeq i\sqrt{\frac{\hbar\omega_\mu}{2\epsilon_0}} \langle c_j | \hat{\boldsymbol{d}}_\nu^{(j)} | \nu_j \rangle \, \boldsymbol{u}_\mu(\boldsymbol{r}) \hat{a}_\mu \, |c_j\rangle\langle\nu_j| & - i\sqrt{\frac{\hbar\omega_\mu}{2\epsilon_0}} \langle \nu_j | \hat{\boldsymbol{d}}_\nu^{(j)} | c_j \rangle \, \boldsymbol{u}_\mu^*(\boldsymbol{r}) \hat{a}_\mu^\dagger \, |\nu_j\rangle\langle c_j| \\
\equiv -(i\hbar g_\mu^{(j)} \hat{a}_\mu \, |c_j\rangle\langle\nu_j| + h.c.) &
\end{aligned}
\tag{2.1.5}
$$

を得る．ここで回転波近似[*1]を用いた．なお，

$$
g_\mu^{(j)} \equiv -\sqrt{\frac{\omega_\mu}{2\hbar\epsilon_0}} \langle c_j | \hat{\boldsymbol{d}}_\nu^{(j)} | \nu_j \rangle \cdot \boldsymbol{u}_\mu(\boldsymbol{r}) \tag{2.1.6}
$$

とした．

以上から，式 (2.1.2) は，

$$
\hat{\mathscr{H}}_I = i\hbar \left(\hat{a}_S \sum_{j=1}^{N} g_S^{(j)} \, |c_j\rangle\langle a_j| + \hat{a}_{AS} \sum_{j=1}^{N} g_{AS}^{(j)} \, |c_j\rangle\langle b_j| \right) + h.c. \tag{2.1.7}
$$

と書き換えられる．

[*1] 原子だけを量子化して光と原子との相互作用を記述する半古典的な取り扱い（例えば付録 C.1）において，光の周波数 ω と原子の遷移周波数 ω_0 との差周波数 $\omega - \omega_0$ でゆっくりと振動する項に対して両者の和周波数 $\omega + \omega_0$ で振動する項を無視する近似がよく行われ，これが回転波近似である．回転波近似において無視される項が記述している放射過程は，吸収・放出といった 1 次の過程ではエネルギーが保存されないものである．式 (2.1.5) においては，例えば，$\hat{a}_\mu \, |\nu_j\rangle\langle c_j|$ は上準位 $|c\rangle$ から下準位 $|\nu\rangle$ への遷移と消滅演算子 $\hat{a}_\mu$ に相当する光子の吸収とが同時に起こる過程を記述しており，これはエネルギー保存の観点から許容されない過程である．したがって，こういった項の寄与を無視する近似も回転波近似と呼ばれる．

このとき，ハミルトニアンは

$$\hat{\mathscr{H}} = \hat{\mathscr{H}}_0 + \hat{\mathscr{H}}_I \tag{2.1.8}$$
$$\hat{\mathscr{H}}_0 = \sum_{j=1}^{N}\Big(E_a\,|a_j\rangle\langle a_j| + E_b\,|b_j\rangle\langle b_j| + E_c\,|c_j\rangle\langle c_j|\Big) + \hbar\omega_S\hat{a}_S^\dagger\hat{a}_S + \hbar\omega_{AS}\hat{a}_{AS}^\dagger\hat{a}_{AS}$$
$$\hat{\mathscr{H}}_I = i\hbar\left(\hat{a}_S\sum_{j=1}^{N} g_S^{(j)}\,|c_j\rangle\langle a_j| + \hat{a}_{AS}\sum_{j=1}^{N} g_{AS}^{(j)}\,|c_j\rangle\langle b_j|\right) + h.c.$$

で与えられる．

$g_\mu^{(j)}$ の絶対値があらゆる原子で等しいとみなせる場合，光と原子集団の相互作用を集団的に扱えることが知られている [61]．本章での議論においても，

$$\begin{cases} g_S^{(j)} & = g_S e^{i\phi(\boldsymbol{r})} \\ g_{AS}^{(j)} & = g_{AS} e^{i\varphi(\boldsymbol{r})} \end{cases} \tag{2.1.9}$$

が成り立つものとする．$e^{i\phi}$ などの位相項は，式 (2.1.6) からわかるように，遷移に対応して吸収・散乱される光のモード関数を反映している．

ここで，j 番目の原子に対する遷移演算子を次のように定義する:

$$\begin{cases} \hat{\sigma}_{ca}^{(j)} & \equiv |c_j\rangle\langle a_j|\, e^{i\phi(\boldsymbol{r})}, \\ \hat{\sigma}_{cb}^{(j)} & \equiv |c_j\rangle\langle b_j|\, e^{i\varphi(\boldsymbol{r})}. \end{cases} \tag{2.1.10}$$

$\hat{\sigma}_{\nu\nu}^{(j)} \equiv |\nu_j\rangle\langle\nu_j|$ として，式 (2.1.8) を書き直すと次を得る:

$$\hat{\mathscr{H}} = \hat{\mathscr{H}}_0 + \hat{\mathscr{H}}_I$$
$$\hat{\mathscr{H}}_0 = \sum_{j=1}^{N}\Big(E_a\hat{\sigma}_{aa}^{(j)} + E_b\hat{\sigma}_{bb}^{(j)} + E_c\hat{\sigma}_{cc}^{(j)}\Big) + \hbar\omega_S\hat{a}_S^\dagger\hat{a}_S + \hbar\omega_{AS}\hat{a}_{AS}^\dagger\hat{a}_{AS} \tag{2.1.11}$$
$$\hat{\mathscr{H}}_I = i\hbar\left(g_S\hat{a}_S\sum_{j=1}^{N}\hat{\sigma}_{ca}^{(j)} + g_{AS}\hat{a}_{AS}\sum_{j=1}^{N}\hat{\sigma}_{cb}^{(j)}\right) + h.c.$$

運動方程式 $i\hbar\frac{\mathrm{d}\hat{O}}{\mathrm{d}t} = [\hat{O}, \hat{\mathscr{H}}]$ に $\hat{\sigma}_{\mu c}^{(j)}$ を代入して時間発展を考えると，$\mu \neq \nu$ として

$$i\hbar\frac{\mathrm{d}\hat{\sigma}_{\mu c}^{(j)}}{\mathrm{d}t} = (E_c - E_\mu)\,\hat{\sigma}_{\mu c}^{(j)} + i\hbar g_\mu\hat{a}_\mu\left(\hat{\sigma}_{\mu\mu}^{(j)} - \hat{\sigma}_{cc}^{(j)}\right) + i\hbar g_\nu\hat{a}_\nu\hat{\sigma}_{\mu\nu}^{(j)} \tag{2.1.12}$$

が成り立つ．ここで，

$$\hat{\sigma}_{ab}^{(j)} = \hat{\sigma}_{ca}^{(j)\dagger}\hat{\sigma}_{cb}^{(j)} = |a_j\rangle\langle b_j|\, e^{i(\phi(\boldsymbol{r})-\varphi(\boldsymbol{r}))} \tag{2.1.13}$$

とおいた．$E_c - E_\mu = \hbar(\omega_\mu - \Delta)$ を用いれば，

$$\frac{\mathrm{d}\hat{\sigma}_{\mu c}^{(j)}}{\mathrm{d}t} = -i\left(\omega_\mu - \Delta\right)\hat{\sigma}_{\mu c}^{(j)} + g_\mu \hat{a}_\mu \left(\hat{\sigma}_{\mu\mu}^{(j)} - \hat{\sigma}_{cc}^{(j)}\right) + g_\nu \hat{a}_\nu \hat{\sigma}_{\mu\nu}^{(j)} \tag{2.1.14}$$

と書き直せる．また，回転座標系に移ることで以下のように簡略化される:

$$\frac{\mathrm{d}\tilde{\sigma}_{\mu c}^{(j)}}{\mathrm{d}t} = i\Delta\tilde{\sigma}_{\mu c}^{(j)} + g_\mu \tilde{a}_\mu \left(\tilde{\sigma}_{\mu\mu}^{(j)} - \tilde{\sigma}_{cc}^{(j)}\right) + g_\nu \tilde{a}_\nu \tilde{\sigma}_{\mu\nu}^{(j)}, \tag{2.1.15}$$

$$\begin{aligned}\hat{\sigma}_{\mu c}^{(j)}(t) &= \tilde{\sigma}_{\mu c}^{(j)}(t)e^{-i\omega_\mu t},\\ \hat{\sigma}_{\mu\nu}^{(j)}(t) &= \tilde{\sigma}_{\mu\nu}^{(j)}(t)e^{-i(\omega_\mu-\omega_\nu)t},\\ \hat{a}_\mu(t) &= \tilde{a}_\mu(t)e^{-i\omega_\mu t}.\end{aligned} \tag{2.1.16}$$

この置き換えは，静止座標系から光の周波数で回転する回転座標系に移行することを意味している．これらを形式的に積分する．

$$\tilde{\sigma}_{\mu c}^{(j)} = e^{i\Delta t}\left\{\tilde{\sigma}_{\mu c}^{(j)}(t=0) + \int_0^t g_\mu \tilde{a}_\mu \left(\tilde{\sigma}_{\mu\mu}^{(j)} - \tilde{\sigma}_{cc}^{(j)}\right) e^{-i\Delta\cdot t'}\mathrm{d}t' + \int_0^t g_\nu \tilde{a}_\nu \tilde{\sigma}_{\mu\nu}^{(j)} e^{-i\Delta\cdot t'}\mathrm{d}t'\right\}$$

ここで，$\tilde{\sigma}_{\mu c}(t=0) = 0$ であり，シュタルクシフトの寄与 (第 2 項) を無視すると，

$$\tilde{\sigma}_{\mu c}^{(j)} = e^{i\Delta t}\int_0^t g_\nu \tilde{a}_\nu \tilde{\sigma}_{\mu\nu}^{(j)} e^{-i\Delta\cdot t'}\mathrm{d}t' \tag{2.1.17}$$

と簡単化される．積分を計算すると，断熱条件 $\Delta^2 \gg \dfrac{\mathrm{d}\left\langle \tilde{a}_\nu \tilde{\sigma}_{\mu\nu}^{(j)}\right\rangle}{\mathrm{d}t}$ のもとで次式を得る:

$$\begin{aligned}\tilde{\sigma}_{\mu c}^{(j)} &= e^{i\Delta\cdot t} g_\nu \left\{\frac{\tilde{a}_\nu \tilde{\sigma}_{\mu\nu}^{(j)} e^{-i\Delta\cdot t}}{-i\Delta} - \frac{\frac{\mathrm{d}(\tilde{a}_\nu \tilde{\sigma}_{\mu\nu}^{(j)})}{\mathrm{d}t} e^{-i\Delta\cdot t}}{(-i\Delta)^2} + \frac{\frac{\mathrm{d}^2(\tilde{a}_\nu \tilde{\sigma}_{\mu\nu}^{(j)})}{\mathrm{d}t^2} e^{-i\Delta\cdot t}}{(-i\Delta)^3} - \cdots\right\}\\ &\simeq \frac{i g_\nu \tilde{a}_\nu \tilde{\sigma}_{\mu\nu}^{(j)}}{\Delta}\end{aligned} \tag{2.1.18}$$

もとの座標系に戻ると $\hat{\sigma}_{\mu c}^{(j)} \simeq i g_\nu \hat{a}_\nu \hat{\sigma}_{\mu\nu}^{(j)}/\Delta$ であり，これを式 (2.1.11) に代入すると次の相互作用ハミルトニアンを得る．

$$\hat{\mathscr{H}}_I = \frac{2\hbar g_S g_{AS}}{\Delta}\hat{a}_S(t)\hat{a}_{AS}^\dagger(t)\sum_{j=1}^N \hat{\sigma}_{ab}^{(j)\dagger}(t) + h.c. \tag{2.1.19}$$

続いて，$\hat{\sigma}_{cc}^{(j)}$ の時間発展を考える．$[\hat{\sigma}_{cc}^{(j)}, \hat{\mathscr{H}}^{(H)}] = 0$ であるから，$\dfrac{\mathrm{d}\hat{\sigma}_{cc}^{(j)}}{\mathrm{d}t} = 0$ が成り立ち，初期状態としてすべての原子が $|a\rangle$ にある状態を考えた場合 $\hat{\sigma}_{cc}^{(j)}(t=0) = 0$ である

から，$\hat{\sigma}_{cc}^{(j)}(t) = 0$ が成り立つ．以上から，式 (2.1.11) は

$$\hat{\mathscr{H}} = \hat{\mathscr{H}}_0 + \hat{\mathscr{H}}_I \tag{2.1.20}$$

$$\hat{\mathscr{H}}_0 = \sum_{j=1}^{N}\left(E_a\hat{\sigma}_{aa}^{(j)}(t) + E_b\hat{\sigma}_{bb}^{(j)}(t)\right) + \hbar\omega_S\hat{a}_S^\dagger(t)\hat{a}_S(t) + \hbar\omega_{AS}\hat{a}_{AS}^\dagger(t)\hat{a}_{AS}(t)$$

$$\hat{\mathscr{H}}_I = \frac{2\hbar g_S g_{AS}}{\Delta}\hat{a}_S(t)\hat{a}_{AS}^\dagger(t)\sum_{j=1}^{N}\hat{\sigma}_{ab}^{(j)\dagger}(t) + h.c. \tag{2.1.21}$$

と変形される．このハミルトニアンからは励起準位 $|c\rangle$ の寄与が完全に消滅しており，この近似は断熱消去 [62] と呼ばれる．

2.2　集団相互作用

集団的スピン演算子

$$\begin{aligned}\hat{S}_+ &= \sum_{j=1}^{N}\hat{\sigma}_{ab}^{(j)\dagger}\\ \hat{S}_- &= \sum_{j=1}^{N}\hat{\sigma}_{ab}^{(j)}\\ \hat{S}_z &= \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N}(\hat{\sigma}_{bb}^{(j)} - \hat{\sigma}_{aa}^{(j)})\end{aligned} \tag{2.2.1}$$

を導入して相互作用ハミルトニアン $\hat{\mathscr{H}}_I$ を書きなおすと，シュレディンガー表示で

$$\hat{\mathscr{H}}_I = \frac{2\hbar g_S g_{AS}}{\Delta}(\hat{a}_S\hat{a}_{AS}^\dagger\hat{S}_+ + \hat{a}_S^\dagger\hat{a}_{AS}\hat{S}_-) \tag{2.2.2}$$

を得る．

$\hat{S}_\pm$ は集団スピンの昇降演算子であって[*2]，スピンの交換関係

$$\begin{aligned}[\hat{S}_z, \hat{S}_\pm] &= \pm\hat{S}_\pm\\ [\hat{S}_+, \hat{S}_-] &= 2\hat{S}_z\end{aligned} \tag{2.2.6}$$

[*2] $\hat{S}_x$，$\hat{S}_y$，$\hat{S}_z$ に対して，

$$[\hat{S}_x, \hat{S}_y] = i\hat{S}_z \tag{2.2.3}$$

$$[\hat{S}_y, \hat{S}_z] = i\hat{S}_x \tag{2.2.4}$$

$$[\hat{S}_z, \hat{S}_x] = i\hat{S}_y. \tag{2.2.5}$$

$\hat{S}_\pm \equiv \hat{S}_x \pm i\hat{S}_y$ を導入すれば，式 (2.2.6) となる．

を満たす.

スピンの大きさを S , その z 成分を S_z とすると, 原子集団の量子状態は $|S; S_z\rangle$ で与えられる. スピン演算子と原子集団の状態に対して, 関係式

$$\begin{aligned} \hat{S}_\pm |S; S_z\rangle &= \sqrt{(S \mp S_z)(S \pm S_z + 1)}\, |S; S_z \pm 1\rangle \\ \hat{S}_z |S; S_z\rangle &= S_z |S; S_z\rangle \end{aligned} \tag{2.2.7}$$

が成り立つ. スピンの大きさは相互作用によって変わらないので, 原子集団の状態を $|S_z\rangle_a$ で表すことにする.

初期状態としてすべての原子が準位 $|a\rangle$ にある場合を考えると, 原子集団を表すスピンの大きさ $S = \frac{N}{2}$ であり, 原子集団の初期状態は $|-S\rangle_a$ で与えられる. $|a\rangle \leftrightarrow |c\rangle$ 遷移に結合している光場はコヒーレント状態 $|\alpha\rangle$ であるとし, $|b\rangle \leftrightarrow |c\rangle$ 遷移に結合している光場の初期状態は真空であると考えると, 光場と原子集団を合わせた全系の初期状態は

$$|\Phi(t=0)\rangle = |-S\rangle_a |\alpha\rangle_S |0\rangle_{AS} \tag{2.2.8}$$

と書ける. この初期状態に関して, 相互作用ハミルトニアンの 0 でない行列要素を計算すると, ラビ周波数を Ω として

$$\langle 1|_{AS} \langle \alpha|_S \langle S_z + 1|_a \hat{\mathscr{H}}_I |S_z\rangle_a |\alpha\rangle_S |0\rangle_{AS} = \frac{2\hbar g_S g_{AS} \alpha \sqrt{N}}{\Delta} = \frac{\hbar \Omega g_{AS} \sqrt{N}}{\Delta} \tag{2.2.9}$$

を得る[*3]. これが, 書き込み過程によって光子 1 個が励起された状態の確率振幅であり, 励起確率 p_c は

$$p_c = \frac{4\hbar^2 g_S^2 g_{AS}^2 |\alpha|^2 N}{\Delta^2} = \frac{\hbar^2 \Omega^2 g_{AS}^2 N}{\Delta^2} \tag{2.2.10}$$

となる. 励起確率に, 相互作用に関与する原子数 N が乗じられている点が重要である. このように, 原子集団が共通の電場モードと相互作用することで相互作用が増強される効果をコレクティブエンハンスメントと呼ぶ.

原子数 N が十分に大きいときには, $\hat{S}_z$ を演算子でなくその期待値と見なすのが良い近似となる. このとき, 交換関係 (2.2.6) は次のように書き直せる:

$$[\hat{S}_+, \hat{S}_-] = -N. \tag{2.2.11}$$

---

*3

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\Omega &\leftrightarrow g_S|\alpha| \\ \frac{i}{2}\Omega &\leftrightarrow g_S\alpha^* \end{aligned}$$

これは $\hat{S} \equiv \hat{S}_-/\sqrt{N}$ によって定義された演算子 $\hat{S}$ がボソンの交換関係 $[S, S^\dagger] = 1$ を満たすことを意味する．すなわち，$\hat{S}$ を原子集団に励起される集団的スピンの消滅演算子と見なすことができる．この描像は，光場の生成・消滅演算子と対応付けて議論する際の見通しを良くするので，次の節で用いる．

2.3　励起状態

相互作用表示において，状態 $|\psi; t\rangle_I$ の時間発展は次の運動方程式に従う:

$$i\hbar \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} |\psi; t\rangle_I = \tilde{V} |\psi; t\rangle_I . \tag{2.3.1}$$

すなわち，$U(t_i, t_f) |\psi; t_i\rangle = |\psi; t_f\rangle$ で指定される時間発展演算子 $U(t_i, t_f)$ は次の微分方程式を満たす:

$$i\hbar \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} U(t_i, t) = \tilde{V}(t) U(t_i, t). \tag{2.3.2}$$

この微分方程式は，$U(t_i, t_i) = 1$ に注意すると，次の積分方程式と同値である:

$$U(t_i, t) = 1 - \frac{i}{\hbar} \int_{t_i}^{t} V(t') U(t_i, t') \mathrm{d}t. \tag{2.3.3}$$

この積分方程式の解は逐次近似によっていくらでも正確に得られる．演算子の積を時間の順序に並び替える，タイムオーダー演算子 $\mathcal{T}(\cdot)$ を用いると，次のような指数関数型の形式が得られる:

$$U(t_i, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{-i}{\hbar} \right)^n \frac{1}{n!} \int_{t_i}^{t} \mathrm{d}t_1 \int_{t_i}^{t} \mathrm{d}t_2 \cdots \int_{t_i}^{t} \mathrm{d}t_n \mathcal{T}[V(t_1) V(t_2) \cdots V(t_n)]. \tag{2.3.4}$$

この級数は，ダイソン級数と呼ばれている [63].

前節までで議論したハミルトニアンによる，原子集団と光子との複合系の励起状態を考える．今，$|a\rangle \leftrightarrow |c\rangle$ 遷移に結合している光場はコヒーレント状態であるとし，式 (2.2.9) と同様にラビ周波数 Ω を導入する．定数 $\lambda = \hbar\Omega g_{\mathrm{AS}} \sqrt{N}/\Delta$, 集団スピンの生成演算子 $\hat{S}^\dagger = \hat{S}_+/\sqrt{N}$ を用い，また $\hat{a} \equiv \hat{a}_{\mathrm{AS}}$ と略記して相互作用ハミルトニアン (2.1.21) を次のように書き改める:

$$\hat{\mathscr{H}}_I = \lambda \hat{S}^\dagger \hat{a}^\dagger + h.c.$$

相互作用ハミルトニアン $\hat{\mathscr{H}}_I$ は，相互作用表示で次のように書ける:

$$\begin{aligned}
\tilde{V} &= e^{iH_0 t/\hbar} \hat{\mathscr{H}}_I e^{-iH_0 t/\hbar} \\
&= \lambda e^{iH_0 t/\hbar} \hat{S}^\dagger e^{-iH_0 t/\hbar} e^{iH_0 t/\hbar} \hat{a}_{\mathrm{s}}^\dagger e^{-iH_* 0 t/\hbar} + h.c. \\
&= \lambda \tilde{S}^\dagger \tilde{a}^\dagger + h.c.
\end{aligned} \tag{2.3.5}$$

今，相互作用の強さは十分短い相互作用時間 $\delta t = t_f - t_i$ 内で一定であるとする．この近似のもとでは，式 (2.3.4) 中の被積分関数は定数となる．このとき，時間発展演算子 $U(t_i, t_f)$ は次のように与えられる:

$$\begin{aligned} U(\delta t) &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{-i}{\hbar}\right)^n \frac{1}{n!} \mathcal{T}(\tilde{V}^n) \delta t^n \\ &= \exp\left(\frac{-i\lambda\delta t}{\hbar} \tilde{S}^\dagger \tilde{a}^\dagger + \frac{-i\lambda^* \delta t}{\hbar} \tilde{S}\tilde{a}\right). \end{aligned} \tag{2.3.6}$$

ここで，$\lambda = i|\lambda|$ によって複素数 λ の位相を指定する[*4]．また，相互作用の強さを意味する実数 $r = |\lambda|\delta t/\hbar$ を導入し，式 (2.3.6) を書き直すと，次のように 2 モードスクイーズ演算子 [2] で U を表現できる:

$$U = \exp\left[r(\tilde{S}^\dagger \tilde{a}^\dagger - \tilde{S}\tilde{a})\right]. \tag{2.3.7}$$

前節で議論したように，集団的スピン演算子 S は原子集団を構成する原子数 N が大きい極限でボソンの交換関係を満足し，ボース粒子を生成する演算子とみなせる．光子数状態との対応をあらわにする目的で，前節で導入した原子集団の初期状態 $\left|-S\right\rangle_a$ を真空状態に見立て $|0_a\rangle$ と表記する．同様に，第 n 励起状態 $\left|-S+n\right\rangle_a = (\hat{S}^\dagger)^n \left|-S\right\rangle_a / \sqrt{n!}$ を $|n_a\rangle$ と表記する．この状態は，N 個の原子のうちのいずれか n 個が励起されたあらゆる状態の重ね合わせになっており，Dicke 状態と呼ばれる，光場の Fock 状態 $|n_p\rangle$ に対応するものである．

原子集団と光子との複合系の初期状態 $|0_a\rangle \otimes |0_p\rangle$ に演算子 U が作用した状態が所望の励起状態である．U を正規順序で書き直すと，以下のようになる:

$$U = (\cosh r)^{-1} \exp(-\tilde{S}^\dagger \tilde{a}^\dagger \tanh r) \exp\left[-\ln(\cosh r)(\tilde{S}^\dagger \tilde{S} + \tilde{a}^\dagger \tilde{a})\right] \exp(-\tilde{S}\tilde{a} \tanh r).$$

したがって，励起状態は，

$$\begin{aligned} |\psi\rangle = U|0_a\rangle|0_p\rangle &= \frac{1}{\cosh r} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\tilde{S}^\dagger \tilde{a}^\dagger \tanh r)^n}{n!} |0_a\rangle|0_p\rangle \\ &= \frac{1}{\cosh r} \sum_{n=0}^{\infty} (-\tanh r)^n |n_a\rangle|n_p\rangle \end{aligned} \tag{2.3.8}$$

で与えられる．

[*4] 前節まででは，λ が実数になるように (g の位相を) 選んでいた．この書き換えによって一般性を失わない．

$\hat{S} \equiv \hat{S}_-/\sqrt{N}$, 式 (2.2.1), 式 (2.1.13) などを用いて，原子集団の単一励起状態をあらわに書くと，次のようになる:

$$\begin{aligned} S^\dagger \left|0_a\right\rangle &\equiv \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=1}^{N} |b_j\rangle\langle a_j| \, e^{i(\varphi(\boldsymbol{r})-\phi(\boldsymbol{r}))} \left|a_1\right\rangle \left|a_2\right\rangle \left|a_3\right\rangle \cdots \left|a_N\right\rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=1}^{N} e^{i(\varphi(\boldsymbol{r})-\phi(\boldsymbol{r}))} \left|a_1\right\rangle \left|a_2\right\rangle \cdots \left|b_j\right\rangle \cdots \left|a_N\right\rangle . \end{aligned} \tag{2.3.9}$$

注目したいのは，位相 $e^{i(\varphi(\boldsymbol{r})-\phi(\boldsymbol{r}))}$ の存在である．式 (2.1.9) とその周辺で述べたように，この位相は入射した光と散乱される光子の空間モード関数に由来する，相対位相の空間分布である．このことは，原子集団の集団励起において，吸収した光と散乱した光の位相差の空間分布を準位 $|a\rangle$, $|b\rangle$ 間の位相差の空間分布として記憶することを意味している．換言すると，相互作用によって原子集団に屈折率グレーティングが刻まれると解釈できる．

第 3 章

実験 I: 非古典相関を持った光子対の生成

本章では，光子数状態を表現基底とした密度行列の対角成分である光子数分布に感度を持った測定—強度相関の測定—を散乱光子対に対して行った実験について述べる．

エンタングルメントを評価する際に測定される同時計数の信号雑音比は，規格化された強度相関の値によって制限されることになる．したがって，強度相関の測定値から評価される光子対の非古典性は，エンタングルメントの評価がどの程度の信頼性で行えるかを示す良い指標となる．

原子集団と光の集団的相互作用によって散乱される光子対の非古典相関についての最初の報告は，冷却 Cs 原子集団を用いた Kuzmich ら [33] による 2003 年の論文で，非古典性のパラメータ[*1] $R = 1.84 \pm 0.06 \nleq 1$, 光子対のフラックス (同時計数率)$r \sim 1\,[\mathrm{s}^{-1}]$ であった．その後，同様のシステムで $R = 53 \pm 2$ [64], $R = 292 \pm 57$ [65] が報告されている．式 (3.1.15) から容易に分かるように，R を得るためには，相互強度相関と自己強度相関を測定する必要がある．エンタングルメント等を評価する際に測定される同時計数の信号雑音比に直接関わるのは相互強度相関であり，自己強度相関は迷光の寄与を含めても 1 以上 2 以下の値を取るため，十分高い相互強度相関が得られるようになった昨今では相互強度相関の値だけが示されることが多い．例えば，原子集団-光子間のエンタングルメント生成を最初に報告した [34] では，$g^{(2)}_{\mathrm{cross}} \sim 21$, $r \sim 0.4\,[\mathrm{s}^{-1}]$ が示されている[*2]．ごく最近の，1 次元光格子にトラップされた ^{87}Rb 原子集団を用いた実験 [66] で報告されている

---

*1 式 (3.1.15) を参照．$R \leq 1$ が古典領域であり，R が大きいことは高い非古典性の反映である．本章で測定の対象となる光子対に関しては，信号雑音比を十分にとることができていれば，いくらでも大きな R を得られることが期待される．

*2 不確かな情報も含めて R を “推測”すると，$R \sim 300$ 程度であろうと期待される．理想的には $R = (g^{(2)}_{\mathrm{cross}})^2/4$ であるが，分母 (自己強度相関の積) はコヒーレント光の混入によって低い値を取ることが多く，実験的には $1 \sim 2$ 程度になることが多い．

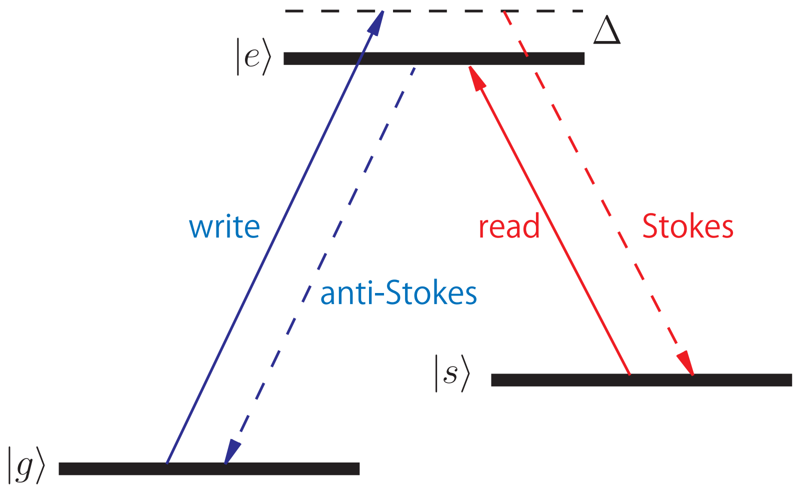

図 3.1　非古典光子対生成のための Λ 型 3 準位系と光のエネルギー関係．Stokes, anti-Stokes の 2 モードの間に非古典的な相関があることが期待される．

測定値から推測すると，$g^{(2)}_{\mathrm{cross}} > 100$ 程度は得られているだろうことが予想される．

ここまでに挙げた結果は，いずれも原子集団に励起した集団的（擬）スピンを量子情報の担体として用いることを見越したものであり，光子-集団的スピンの同時励起を行った後，一定の遅延時間の後に集団的スピンの状態を光子の状態に転写することで光子対を得ている．この遅延時間は原子集団のコヒーレンス時間によって制限される．遅延時間をゼロにした場合の実験状況は，自然放出 4 光波混合として知られている．冷却原子集団を用いた自然放出 4 光波混合での Stokes, anti-Stokes 光の相互強度相関は [67, 68] で報告され，それぞれ $g^{(2)}_{\mathrm{cross}} \sim 20, 45$ が得られている．連続的に励起が行えることが特徴で，光子対の生成レートはそれぞれ 12000 $[\mathrm{s}^{-1}]$, 600 $[\mathrm{s}^{-1}]$ という高い値が報告されている．同様の条件で，室温の原子集団を用いた実験 [69] では，$g^{(2)}_{\mathrm{cross}} = 1.57 \pm 0.04$, $r > 20000\,[\mathrm{s}^{-1}]$ が報告されている．室温の原子集団で $g^{(2)}_{\mathrm{cross}}$ が極端に低くなってしまうのは，原子集団に刻まれた屈折率の空間構造（空間周期 10μm 程度の屈折率グレーティング）が光子対の相関に影響していることの反映であろうと予想される．

3.1　理論

図 3.1 は, 原子集団を構成する各原子の内部状態と照射されるレーザー光 (write, read), 散乱される光子 (Stokes, anti-Stokes) の関係を示したものである．原子集団の初期状態は，すべての原子が準位 $|g\rangle$ にオプティカルポンピングされた $|i_{\mathrm{atoms}}\rangle \equiv \otimes_j |g_j\rangle$ であるとする．ここで，j は各原子に付けられたラベルであり，$\otimes_j$ はすべての原子にわたって直積をとることを意味する．第 2 章で詳細を議論したように，原子集団と光子の集団的な相

互作用を記述する実効的な相互作用ハミルトニアンは次のように与えられる:

$$V = \lambda \hat{S}^\dagger \hat{a}_\mathrm{s}^\dagger + h.c. \tag{3.1.1}$$
$$\lambda = \frac{\hbar\Omega g\sqrt{N}}{\Delta}, \quad \hat{S}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{j=1}^{N} |s_j\rangle\langle g_j| .$$

ここで，N は原子数，Ω は write のラビ周波数，g は Stokes 場と遷移 $|s\rangle \leftrightarrow |e\rangle$ の結合定数，Δ は write の周波数と $|g\rangle \leftrightarrow |e\rangle$ との遷移周波数の差である．また，$\hat{a}_\mathrm{s}^\dagger$ は Stokes 場の光子の生成演算子である．原子数 N が大きいとき，演算子 $\hat{S}$ はボソンの交換関係を満足する．すなわち，前述の原子集団の初期状態 $|i_\mathrm{atoms}\rangle$ を真空状態に見立てることで，原子集団の励起状態を光子数状態と同様に扱うことができる．見通しを良くするために，この初期状態を $|0_a\rangle$ と表す.

原子集団と Stokes 場の初期状態は $|0_a\rangle \otimes |0_s\rangle$ で与えられる．$|0_s\rangle$ は Stokes 場の真空状態である.

この相互作用ハミルトニアンは 2 粒子を同時に生成する役割を果たし，式 (2.3.8) と同様に，原子集団と光子の複合系の励起状態は次のように書ける:

$$|\psi\rangle = U|0_a\rangle|0_p\rangle = \frac{1}{\cosh r}\sum_{n=0}^{\infty}(-\tanh r)^n |n_a\rangle|n_p\rangle , \tag{3.1.2}$$
$$U = \exp\left[r(\hat{S}^\dagger \hat{a}^\dagger - \hat{S}\hat{a})\right].$$

ここで，相互作用時間を δt として，正の実数値 $r = |\lambda|\delta t/\hbar$ は励起の強さとしての意味を持つパラメータである．原子集団の状態は，電磁誘起透明化を用いた量子メモリの再生過程 [付録 C] を利用することで対応する光子数状態に置き換えることができる．すなわち，検出される光子対の状態は,

$$|\psi\rangle = U|0_1\rangle|0_2\rangle = \frac{1}{\cosh r}\sum_{n=0}^{\infty}(-\tanh r)^n |n_1\rangle|n_2\rangle , \tag{3.1.3}$$
$$U = \exp\left[r(\hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2^\dagger - \hat{a}_1\hat{a}_2)\right],$$

で与えられる．以下に示すように，添え字 1, 2 で指定される 2 つのモードの光子の間に非古典的な相関が期待される.

3.1.1 古典領域で成り立つ不等式

2 モードの強度相関関数 $g_{12}^{(2)}(0)$ は

$$g_{12}^{(2)}(0) = \frac{\langle \hat{a_1}^\dagger \hat{a_1}\hat{a_2}^\dagger \hat{a_2}\rangle}{\langle \hat{a_1}^\dagger \hat{a_1}\rangle\langle \hat{a_2}^\dagger \hat{a_2}\rangle} \tag{3.1.4}$$

で定義される．この式の分子を P 関数 (B.1.17) で表すことを考えると，

$$\langle \hat{a_1}^\dagger \hat{a_1} \hat{a_2}^\dagger \hat{a_2} \rangle = \int \mathrm{d}^2\alpha_1 \int \mathrm{d}^2\alpha_2 |\alpha_1|^2 |\alpha_2|^2 P(\alpha_1, \alpha_2) \tag{3.1.5}$$

と書ける．任意の α_1 ，α_2 に対して正の P 関数が存在すると仮定すると，この式の右辺は揺らぎを含む複素振幅 α_1 と α_2 で表される 2 つの電場についての古典的な強度相関関数である．なお P 関数は，式 (B.1.17) を参照すれば分かるようにコヒーレント状態を基底として表現された “確率分布” である．コヒーレント状態 $|\alpha\rangle$ は，平均光子数 $|\alpha|^2$ が十分大きく量子揺らぎが無視できる場合には古典的安定波と見なせる．この意味で，コヒーレント状態 $|\alpha\rangle$ は古典的な光と量子的な光の境界を定義するのに適している．古典的には確率分布としての意味を持つ P 関数が局所的にでも負値をとるとすると，コヒーレント状態を古典的安定波と見なす描像が破綻していると言える．つまり，ある状態の P 関数がいたるところで正であるという仮定は，その状態が古典的であるという仮定に相当する．

任意の複素数 α_1 ，α_2，および任意の実数 t に対して，

$$\{t|\alpha_1|^2 + |\alpha_2|^2\}^2 \geq 0 \tag{3.1.6}$$

が成り立つ．したがって，任意の α_1 ，α_2 に対して正の P 関数を仮定して，P 関数の重みをつけて積分すると，

$$\int \mathrm{d}^2\alpha_1 \int \mathrm{d}^2\alpha_2 P(\alpha_1, \alpha_2) \{t|\alpha_1|^2 + |\alpha_2|^2\}^2 \geq 0 \tag{3.1.7}$$

も成り立つ．左辺を変形すると，実数の t に対して常に成り立つ不等式

$$pt^2 + 2qt + r \geq 0 \tag{3.1.8}$$

を得る．ただし，

$$p = \int \mathrm{d}^2\alpha_1 \int \mathrm{d}^2\alpha_2 |\alpha_1|^4 P(\alpha_1, \alpha_2) \tag{3.1.9}$$

$$q = \int \mathrm{d}^2\alpha_1 \int \mathrm{d}^2\alpha_2 |\alpha_1|^2 |\alpha_2|^2 P(\alpha_1, \alpha_2) \tag{3.1.10}$$

$$r = \int \mathrm{d}^2\alpha_1 \int \mathrm{d}^2\alpha_2 |\alpha_2|^4 P(\alpha_1, \alpha_2) \tag{3.1.11}$$

とおいた．ある α_1 ，α_2 に対して $|\alpha_1|^4 P(\alpha_1, \alpha_2) \neq 0$ のとき $p > 0$ である．このとき (3.1.8) は常に成り立つことから，$pt^2 + 2qt + r = 0$ としたときの判別式を D とおくと，$D \leq 0$ である．したがって，$\frac{D}{4} = q^2 - pr \leq 0$ が成り立つことから，

$$\begin{aligned} \{\int \mathrm{d}^2\alpha_1 \int \mathrm{d}^2\alpha_2 |\alpha_1|^2 |\alpha_2|^2 P(\alpha_1, \alpha_2)\}^2 \leq & \{\int \mathrm{d}^2\alpha_1 \int \mathrm{d}^2\alpha_2 |\alpha_1|^4 P(\alpha_1, \alpha_2)\} \\ & \times \{\int \mathrm{d}^2\alpha_1 \int \mathrm{d}^2\alpha_2 |\alpha_2|^4 P(\alpha_1, \alpha_2)\} \end{aligned} \tag{3.1.12}$$

が成り立つ．恒等的に $|\alpha_1|^4 P(\alpha_1, \alpha_2) = 0$ のときは等号が成立する．以上から，任意の α_1 ，α_2 に対して正の P 関数を仮定した任意の場合に不等式 (3.1.12) が成り立つことが証明された．

(3.1.12) を演算子でおき戻すと，

$$(\langle \hat{a_1}^\dagger \hat{a_1} \hat{a_2}^\dagger \hat{a_2} \rangle)^2 \leq \langle \hat{a_1}^{\dagger 2} \hat{a_1}^2 \rangle \langle \hat{a_2}^{\dagger 2} \hat{a_2}^2 \rangle \tag{3.1.13}$$

と書ける．これを単一モード強度相関関数 $g_i^{(2)}(0)$ と 2 モード強度相関関数 $g_{12}^{(2)}(0)$ を用いて書き直すと，次の不等式[*3]を得る:

$$[g_{12}^{(2)}(0)]^2 \leq g_1^{(2)}(0) g_2^{(2)}(0). \tag{3.1.14}$$

不等式 (3.1.14) の破れを示すパラメータ R を次のように定義する:

$$R \equiv \frac{[g_{12}^{(2)}(0)]^2}{g_1^{(2)}(0) g_2^{(2)}(0)} \leq 1. \tag{3.1.15}$$

不等式 (3.1.14) はいたるところで正の P 関数を仮定した場合に成り立つ不等式なので，P 関数が負値を取るような古典的でない場に対しては破れる場合もある．

以上をまとめると，命題

$$\text{任意の}\alpha_1, \alpha_2\text{に対して P 関数は正 } \rightarrow \text{ 不等式 (3.1.14) を満たす} \tag{3.1.16}$$

が証明されたわけであるが，この対偶

$$\begin{aligned} \text{不等式 (3.1.14) を破る } &\rightarrow \text{ ある}\alpha_1, \alpha_2\text{に対して P 関数は正でない} \\ &\rightarrow \text{場が非古典的} \end{aligned} \tag{3.1.17}$$

を利用することで，強度相関の測定によって $R > 1$ を実証することで非古典的な場の存在を示せることがわかる．

$R > 1$ となることは，定性的には自分自身との相関よりも他者との相関の方が強いことを意味する．古典的な直感では自分自身とまったく同じコピーとの相関が最大となるのが自然であり，それを超えるような場が他に存在することを想像するのは難しい．後で示すように，式 (3.1.3) のような 2 モード状態は $R > 1$ となる具体例である．

[*3] 内積付きベクトル空間の任意の元 $|u\rangle$ ，$|v\rangle$ に対して成り立つ Cauchy-Schwarz の不等式 $|\langle u|v\rangle|^2 \leq \langle u|u\rangle \langle v|v\rangle$ との類似性から，不等式 (3.1.13) および (3.1.14) も慣例として “Cauchy-Schwarz の不等式” と呼ばれている．

3.1.2　不等式の破れ

式 (3.1.3) に示された光子対の状態に対して，式 (3.1.15) で定義した R は常に 1 より大きな値をとることを示す.

まず，式 (3.1.3) に対して 1 次，2 次のモーメント $\langle \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_i \rangle$, $\langle \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_i \hat{a}_i \rangle$, $\langle \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_1 \hat{a}_2 \rangle$ を計算する.

$$\begin{aligned}\langle \psi | \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_i | \psi \rangle &= \langle 0_1 | \langle 0_2 | U^\dagger \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_i U | 0_1 \rangle | 0_2 \rangle \\ &= \langle 0_1 | \langle 0_2 | U^\dagger \hat{a}_i^\dagger U U^\dagger \hat{a}_i U | 0_1 \rangle | 0_2 \rangle \\ &= | U^\dagger \hat{a}_i U | 0_1 \rangle | 0_2 \rangle |^2 \\ &= \sinh^2 r \end{aligned} \tag{3.1.18}$$

ここで，次の等式を利用した[*4].

$$U^\dagger \hat{a}_1 U = \hat{a}_1 \cosh r + \hat{a}_2^\dagger \sinh r, \tag{3.1.20}$$

$$U^\dagger \hat{a}_2 U = \hat{a}_1^\dagger \sinh r + \hat{a}_2 \cosh r. \tag{3.1.21}$$

その他のモーメントについても同様に計算できる.

$$\langle \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_i \hat{a}_i \rangle = | U^\dagger \hat{a}_i U \cdot U^\dagger \hat{a}_i U | 0_1 \rangle | 0_2 \rangle |^2 = 2 \sinh^4 r. \tag{3.1.22}$$

$$\langle \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_1 \hat{a}_2 \rangle = | U^\dagger \hat{a}_1 U \cdot U^\dagger \hat{a}_2 U | 0_1 \rangle | 0_2 \rangle |^2 = \cosh^2 r \sinh^2 r + \sinh^4 r. \tag{3.1.23}$$

これらを用いて，各種の強度相関関数は次のように計算できる.

$$g_1^{(2)}(0) = g_2^{(2)}(0) = \frac{\langle \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_i \hat{a}_i \rangle}{\langle \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_i \rangle^2} = 2, \tag{3.1.24}$$

$$g_{12}^{(2)}(0) = \frac{\langle \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_1 \hat{a}_2 \rangle}{\langle \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1 \rangle \langle \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_2 \rangle} = 1 + \frac{1}{\tanh^2 r}. \tag{3.1.25}$$

$\tanh r$ は正の実数 r に対して単調増加で，$r \to \infty$ の極限で 1 となる．このことから，任意の r に対して $g_{12}^{(2)}(0) > 2$ が成り立ち，$g_1^{(2)}(0) = g_2^{(2)}(0) = 2$ と併せて式 (3.1.15) で定義したパラメータ R は常に 1 より大きな値を取ることがわかる．$r = |\lambda| \delta t / \hbar = \Omega g \sqrt{N} / \Delta$ という定義や式 (3.1.3) の各項の係数を思い出すと，$\tanh^2 r$ は 1 光子の励起確率に相当

---

*4

$$e^{\lambda B} A e^{-\lambda B} = A + \lambda [B, A] + \frac{\lambda^2}{2!} [B, [B, A]] + \cdots \tag{3.1.19}$$

するパラメータである．r(あるいは $\tanh r$) をいくらでも 0 に近づけることができて，r が小さい極限で $g_{12}^{(2)}(0)$ および R は無限大となることが期待される．

ところで，本節の議論では，光子数演算子 $\hat{n}=\hat{a}^{\dagger}\hat{a}$ の期待値 $\langle\hat{n}\rangle$ が登場しており，実験的にも光子数敏感な測定が可能であることを期待した理論となっている．古典的な実験では光強度，すなわち光子数に比例した信号が得られるためにこれを期待するのは問題ないが，光子数不敏感な光子検出器を用いて測定を行う本研究のモデルとしては不適切であるかもしれない．「光子数不敏感な光子検出器」に対応する測定演算子を用いた議論については付録 B にまとめた．結論だけを示すと，「光子数不敏感な光子検出器」によって測定されたパラメータ R は，光子数敏感な測定器を期待して導かれた本節の R と比較して常に低い値をとる．したがって，古典-非古典の閾値としての $R>1$ は「光子数不敏感な光子検出器」を用いた議論においてもまったく同様である．

3.2 実験

まず，^{87}Rb の磁気光学トラップを用意した．磁気光学トラップは，パーマロイにより磁気遮蔽された真空セル中で行われ，その残留磁場は $100\,\mu$G のオーダーであった[*5]．図 3.1 中の $|g\rangle$, $|s\rangle$, $|e\rangle$ としては，^{87}Rb の超微細準位 $5^2S_{1/2}F=2$, $5^2S_{1/2}F=1$, $5^2P_{1/2}F'=2$ を用いた．実験の 1 サイクルは 1 ms で，所望の初期条件を準備するためのロード時間 $500\,\mu$s と測定時間 $500\,\mu$s に分けられる．ロード時間においては，Cooling 光, Repumping 光, 四重極磁場を用いて磁気光学トラップを行うが，すべての原子が $5^2S_{1/2}F=2$ にあるような初期条件を準備するために，Cooling 光, 四重極磁場を切った後，Repumping 光を $13.4\,\mu$s 長く照射した．

測定時間においては，時間幅 100 ns の write, read を 100 ns の時間差で入射した．その後，原子集団をリセットするために 200 ns 程度の時間幅を持った Repumping 光を照射した．この操作を多数回繰り返した．

実験装置の模式図を図 3.3 に示す．write，read はそれぞれ周波数安定化された外部共振器付半導体レーザーで作られ，音響光学素子によってパルス化された．また，これらの空間モードを図 3.3 中の単一モードファイバー (SMF)1,2 によってガウシアンモードに整えた．SMF1,2 は原子集団の位置でビームウェスト $400\,\mu$m の焦点を結ぶ空間モードを共有するように光学調整されており，SMF1 から出射された光の SMF2 への結合効率は 75% 程度であった．write に設ける離調 Δ を $2\pi\times 10\,$MHz に設定した．なお，write, read の偏光は縦偏光に調整されている．mode1, 2 にそれぞれ散乱された光は，

[*5] 実際には，誘導電流の影響で測定時間中にも mG オーダーの不均一磁場が残留していたことが後に明らかになった．詳細は付録 G.2.2 に示した．

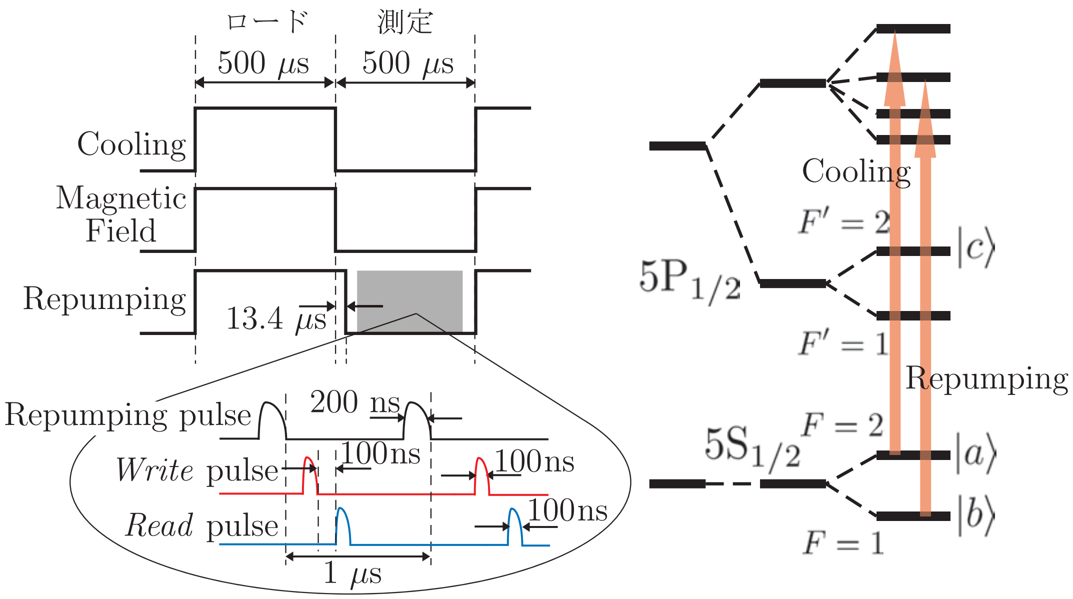

図 3.2 時系列とエネルギー準位

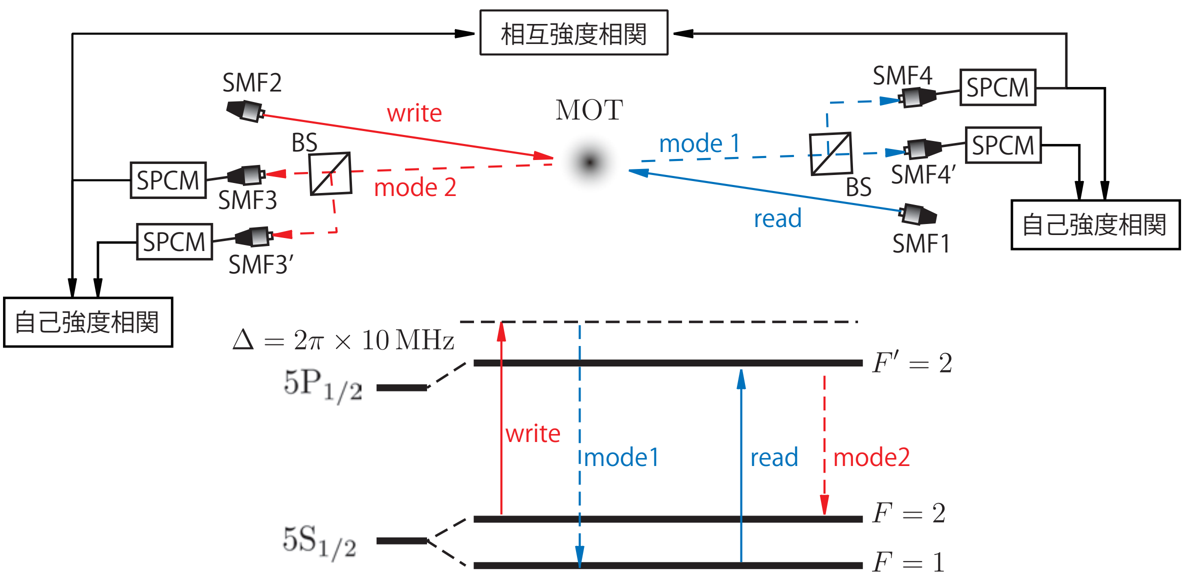

図 3.3 強度相関の測定のための実験系の模式図．SMF, 単一モードファイバー; SPCM, 単一光子検出器; BS, ビームスプリッター．write, read はそれぞれ縦偏光であり，mode1, mode2 の光子はそれぞれ横偏光のものが選択的に検出される．

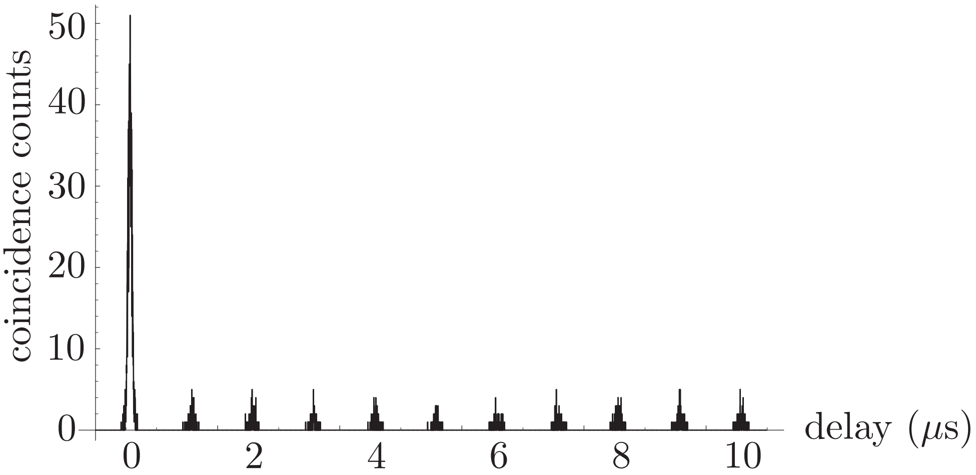

図 3.4　時間分解光子計数の結果．時間分解能は 1.6 ns に設定されている．左端のピークが 2 モードの同時計数に対応している．その他の，1μs ごとに表れるピークは異なるサイクル間での同時計数である．

横偏光で SMF3,4 によって選ばれる空間モードの成分のみが選択的に単一光子検出器 (Perkin-Elmer model SPCM-AQR-14; 検出効率 0.62) に入射されるように調整した．SMF3,4 もまた，原子集団の位置でビームウェスト 140 μm の焦点を結ぶ空間モードを共有するように調整した．SMF1,2 が共有しているモードと SMF3,4 が共有しているモードとが，原子集団の位置でおよそ 3° の角度で交差するように調整した．

write, read のピーク強度をそれぞれ 250nW, 150 μW としたときに測定された，2 モード間の時間分解同時計数の結果を図 3.4 に示す．最初のピークの時間積分は，光子対のフラックス N に対して $N\langle\hat{a}_1^\dagger\hat{a}_2^\dagger\hat{a}_1\hat{a}_2\rangle$ に相当する．その他のピークは，実験の別サイクルにおける mode1, mode2 間の "相関" であり，原子集団の状態は実験の 1 サイクル (1μs) ごとに Repumping 光によって初期化されていることに注意すると，これは完全に無相関な mode1, mode2 間の同時計数である．mode1, mode2 間に相関が無い場合，$\langle\hat{a}_1^\dagger\hat{a}_2^\dagger\hat{a}_1\hat{a}_2\rangle \to \langle\hat{a}_1^\dagger\hat{a}_1\rangle\langle\hat{a}_2^\dagger\hat{a}_2\rangle$ と積を分離することが可能になる．すなわち，これらのピークの時間積分は $N\langle\hat{a}_1^\dagger\hat{a}_1\rangle\langle\hat{a}_2^\dagger\hat{a}_2\rangle$ に相当する．つまり，最初のピークの計数値をその他のピークの計数値の平均によって規格化することで規格化された相互強度相関関数 $g^{(2)}(0)$ を求めることができる．図 3.4 から得られる相互強度相関の値は，$g_{12}^{(2)} = 22.2 \pm 2.9$ であった．なお，誤差は光子計数値がポアソン分布に従うものとして計算した．

$g_{12}^{(2)} \gg 2$ であるから，この結果は不等式 (3.1.14) の大きな破れを約束するものである．このように励起確率が低い領域では，自己相関の測定においてノイズの寄与が支配的であり，自己相関としては 1 に極めて近い測定値が得られた．また，励起確率を上げて[*6] 自

[*6] *write* パルスのピーク強度を 1.7 μW，*read* パルスのピーク強度を 500 μW とした．

己強度相関，相互強度相関を測定したところ，$g_1^{(2)} = 1.52 \pm 0.40$，$g_2^{(2)} = 1.26 \pm 0.10$，$g_{12}^{(2)} = 3.00 \pm 0.06$ を得て，

$$R = \frac{\left[g_{AS,S}^{(2)}\right]^2}{g_{AS}^{(2)} \cdot g_S^{(2)}} = 4.70 \pm 0.47 \nleq 1 \tag{3.2.1}$$

から，1 より大きな自己相関が得られる領域でも不等式 (3.1.14) の破れが確認された．

3.3 考察と展望

実験の繰り返し率は $4.5 \times 10^5\,\mathrm{s}^{-1}$，mode1 の光子の計数率は $3.1 \times 10^2\,\mathrm{s}^{-1}$，相関計数率は $2.0\,\mathrm{s}^{-1}$ であった．また，原子集団から単一光子検出器までの透過率は 0.17 であった．これらのデータから励起確率 p を次の式で計算できる．

$$p = \frac{c}{\mathrm{rep} \times E_t \times E_d}, \tag{3.3.1}$$

ここで，c は mode1 の光子の計数率，rep は実験の繰り返し率，E_t は原子集団から検出器までの透過率，E_d は検出器の検出効率である．式 (3.3.1) によると，本実験における励起確率は 6.6×10^{-3} であった．この励起確率から期待される相互強度相関は，式 (3.1.24) において $\tanh^2 r = 6.6 \times 10^{-3}$ を代入して，$g_{12}^{(2)} \sim 153$ 程度となる．期待される値と比較して，測定値 $g_{12}^{(2)} \sim 20$ は大変低い．これは，検出器の応答の中で被測定光以外の原因によるものの寄与に起因するだろうと予想される[*7]．被測定光以外による検出器からの信号は，図 3.4 のすべてのピークに対するオフセットとして寄与する．最初のピークの（理想的な）計数値を N_0, その他のピークの（理想的な）計数値を N_1, オフセットを N' すると，

$$g_{12}^{(2)}(0) = \frac{N_0 + N'}{N_1 + N'} < \frac{N_0}{N_1} \tag{3.3.2}$$

が任意の $N' > 0$ で成り立つ．最右辺の N_0/N_1 が励起確率から見積った 150 程度に相当する．しかし，オフセット N' の値を測定値から見積ることは難しい．本実験では，(i)write, read の漏れ, (ii) 検出器のダークカウントの 2 つが N' に寄与すると考えられる．検出器のダークカウントは毎秒 50 カウント程度であり，強度相関の測定においては 2 つの検出器からの信号のコインシデンスを取っていることから，(ii) の影響は非常に小

*7 現実の光子検出器の POVM を定義して行った議論 [付録 B.2] から，この直感的な予想の妥当性が示唆される．実効的なダークカウントを無視する近似のもとで，励起確率と検出効率とから現実的な検出器により測定される相互強度相関の値を計算しても 152 程度となる．ダークカウントの寄与を含めると強度相関が 1 に近づくことを考えると，この不一致は，迷光の影響も含めたダークカウントの寄与によるだろうと推察される．

さい．すなわち，write や read の漏れ光の影響を軽減させること（信号雑音比の向上）が実現できればより高い相互強度相関を得られるだろうと期待される．これらの改善については第 5 章に示した．

なお，本実験は軌道角運動量に関するエンタングルメントを評価する実験の予備実験として計画されたものである．エンタングルメントに関する情報は，光子対のそれぞれに対して様々な基底への射影測定を行い，測定結果の相関を評価することで得られる．ここで測定値として採用されるのは，もちろん図 3.4 の最初のピークにあたる値である．理想的には，相関が最小になる測定基底の組み合わせで測定された光子計数値はゼロになるが，迷光や検出器のダークカウントの影響でわずかな計数値が得られてしまうはずである．図 3.4 の delay がゼロでないピークにおける計数値は，ここで言うところの「無相関な場合に得られてしまう計数値」にあたる．すなわち，$g_{12}^{(2)}$ は相関が最大，最小の場合の計数値の比に相当しており，理想的には無限大となるこの値は，エンタングルメントを評価する際の信号雑音比 (の上限) となる．$g_{12}^{(2)} \sim 20$ はエンタングルメントの評価における信号雑音比として十分な値であり，また 2006 年当時，他のグループにより報告されていた同種のシステムにおける強度相関と比較しても最大レベルの値であったため，このようにして得られた光子対を用いて軌道角運動量に関するエンタングルメントを評価する実験 (第 4 章) を行うことにした．

第 4 章

実験 II: 軌道角運動量に関する原子集団-光子間 2 次元エンタングルメントの評価

2 者間での多次元エンタングルメントの共有は，一般的な 2 次元エンタングルメントを利用する場合と比較して，より有用である [54,70]．先駆的な研究 [46] 以来，パラメトリック下方変換 (PDC) で得られる光子対を用いた多次元の軌道角運動量エンタングルド状態が様々に研究されてきた [47–51]．量子情報の担い手としては，情報が光速で伝播し壊れにくいという長所から，光がよく研究されている．しかし，光だけを用いる場合，留めておいて必要なときに取り出して使うことが困難であり，また相互作用を利用した操作が困難である点が問題となる．さらに，PDC を用いたエンタングルド光子対の生成には，それが自然放出を利用した過程であるが故に，生成時間がランダムであるという問題がある．原子集団を援用して光の持つ量子状態を保存を可能にする量子メモリ [28] が実現されればこの問題は解決されるが，PDC では光子対の線幅が原理的に非常に大きくなってしまう点が障害となる [71]．この障害は，光子対に対して線幅を狭窄化してやることで回避できる [72] が，そのためには，光子対の生成レートを大幅に犠牲にするという代償を払わねばならない．このように，PDC で生成された光子対を現実的な量子情報処理に組み込む上ではいくつかの問題がある．これらの問題を回避しうる方策として，第 3 章で示したような，原子集団と光の集団相互作用を PDC の代わりに用いようという提案 [32] がある．

2005 年になってこの集団相互作用を利用して生成した原子集団-光子間の偏光自由度に関するエンタングルメント [34]，原子集団間のエネルギー (と時間) に関するエンタングルメント [35] がそれぞれ報告された．2006 年には，前者の偏光自由度に関するエンタングルメントが量子メモリ [28,36] を利用して原子集団間のそれに拡張された [37]．これら

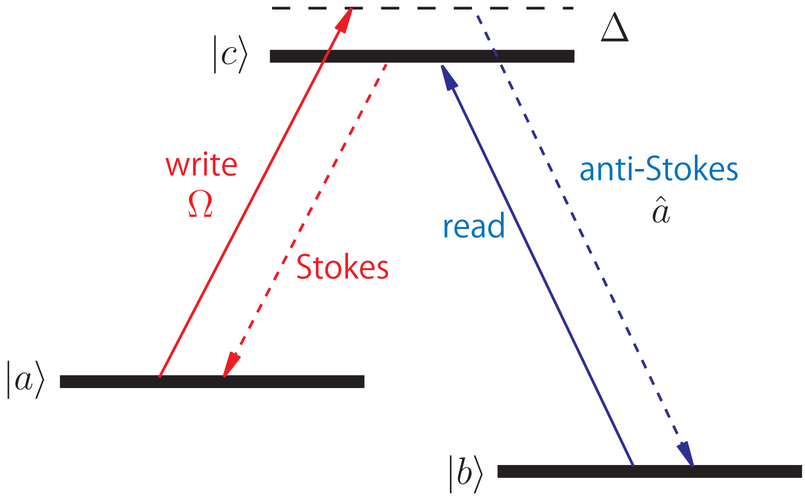

図 4.1　2 次元エンタングルメント生成のための Λ 型 3 準位系．write は，$|a\rangle \rightarrow |c\rangle$ の共鳴周波数から離調 Δ を取った周波数に周波数ロックされており，そのラビ周波数を Ω とする．また，anti-Stokes 場の消滅演算子を $\hat{a}$ とする．

の実験は，原子集団や光子が保持・運搬し得る自由度であるところのスピン角運動量，エネルギーのそれぞれに着目したものである．しかし，原子集団と光子の空間自由度という重要な側面についてはこれらの研究では議論されてこなかった．空間自由度のひとつである軌道角運動量は，前述の多次元エンタングルメントの共有を可能とする自由度としても有望視されている．そこで，本章では冷却原子集団-光子間軌道角運動量エンタングルメントの生成と検証を目的として行った実験研究 [73] について説明する．また，我々の報告の後，室温の原子集団を用いた自然放出 4 光波混合で散乱される光子対に関して，我々が見出した軌道角運動量エンタングルメントと同様のエンタングルメントの存在が報告されている [69]．

4.1　モデル

3.1 での議論と同様に，図 4.1 のような Λ 型 3 準位系を持った原子集団と光 (write) の相互作用を記述する相互作用ハミルトニアン V と，それによって励起される原子集団-光

子の複合系の状態 $|\psi\rangle$ は次のように書ける:

$$
\begin{aligned}
V &= \lambda \hat{S}^\dagger \hat{a}^\dagger + h.c. \\
|\psi\rangle &= \frac{1}{\cosh r}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-\hat{S}^\dagger \hat{a}^\dagger \tanh r)^n}{n!}\,|\mathrm{vac}_a\rangle\,|\mathrm{vac}_p\rangle\,, \qquad (4.1.1)\\
\lambda &= \frac{\hbar\Omega g\sqrt{N}}{\Delta}, \quad r = \frac{|\lambda|\delta t}{\hbar}, \quad \hat{S}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{j=1}^{N} e^{i\varphi(\boldsymbol{r})}\,|b_j\rangle\langle a_j|\,.
\end{aligned}
$$

ここで，$\hat{S}^\dagger$, $\hat{a}^\dagger$ はそれぞれ原子集団，光子の生成演算子，$|\mathrm{vac}_a\rangle$, $|\mathrm{vac}_p\rangle$ はそれぞれ原子集団，光子の真空状態，Ω は write のラビ周波数，g は $|b\rangle \leftrightarrow |c\rangle$ の結合定数，N は原子数，Δ は write の $|a\rangle \to |c\rangle$ 遷移に対する離調，δt は相互作用時間，$\varphi(\boldsymbol{r})$ は write と光子の位相差の空間分布である．$\tanh^2 r$ は励起確率に相当する．

今，$\tanh^2 r \ll 1$ を仮定し，励起があった場合のみ測定を行うことを考える．励起確率 $\tanh^2 r$ は，r の定義から明らかなように，例えば励起に用いる古典光に含まれる光子数を小さくすることでいくらでも 0 に近づけられる．また，測定は単一光子検出器で行うために真空に対する感度を持たず，自動的に「励起があった場合のみ測定を行う」ことになる．このとき，式 (4.1.1) の和のうちで $n = 1$ の項，すなわち単一励起状態のみが支配的になると考えられる．単一励起状態を軌道角運動量状態を基底にして書き直すと，原子集団と光子とは，次のような無限次元のエンタングルド状態にあることが期待される．

$$
|\psi\rangle = \hat{S}^\dagger \hat{a}^\dagger\,|\mathrm{vac}_a\rangle\,|\mathrm{vac}_p\rangle = \sum_{m=-\infty}^{\infty} C_m\,|m_a\rangle\,|-m_p\rangle\,. \qquad (4.1.2)
$$

ここで，$|m_a\rangle$, $|m_p\rangle$ はそれぞれ原子集団，光子が軌道角運動量 $m\hbar$ を持つ状態であり，特に光子の状態は，ラゲールガウシアン (LG) モードとして知られている [付録 A]．各軌道角運動量状態の重み C_m は原子集団と write とが相互作用する領域の形に依存すると考えられる．

実験では $m = 0$ と $m = 1$ にのみ感度を持った測定を行うので，実験で想定される状態を次の式で記述できる．

$$
|\psi(\gamma)\rangle = \frac{1}{\sqrt{1+|\gamma|^2}}\Big(|0_a\rangle\,|0_p\rangle + \gamma\,|{+1}_a\rangle\,|{-1}_p\rangle\Big). \qquad (4.1.3)
$$

ここで，γ は相対振幅，相対位相を表す複素数である．

4.2　実験

原子集団として，磁気光学トラップされた ^{87}Rb 原子集団 (MOT) を用意した．その光学深度はおよそ 4 であった．図 4.1 の各準位とは，$5S_{1/2}$, $F = \{2, 1\}$ が $\{|a\rangle\,, |b\rangle\}$ に，$5P_{1/2}$, $F' = 2$ が $|c\rangle$ にそれぞれ対応している．

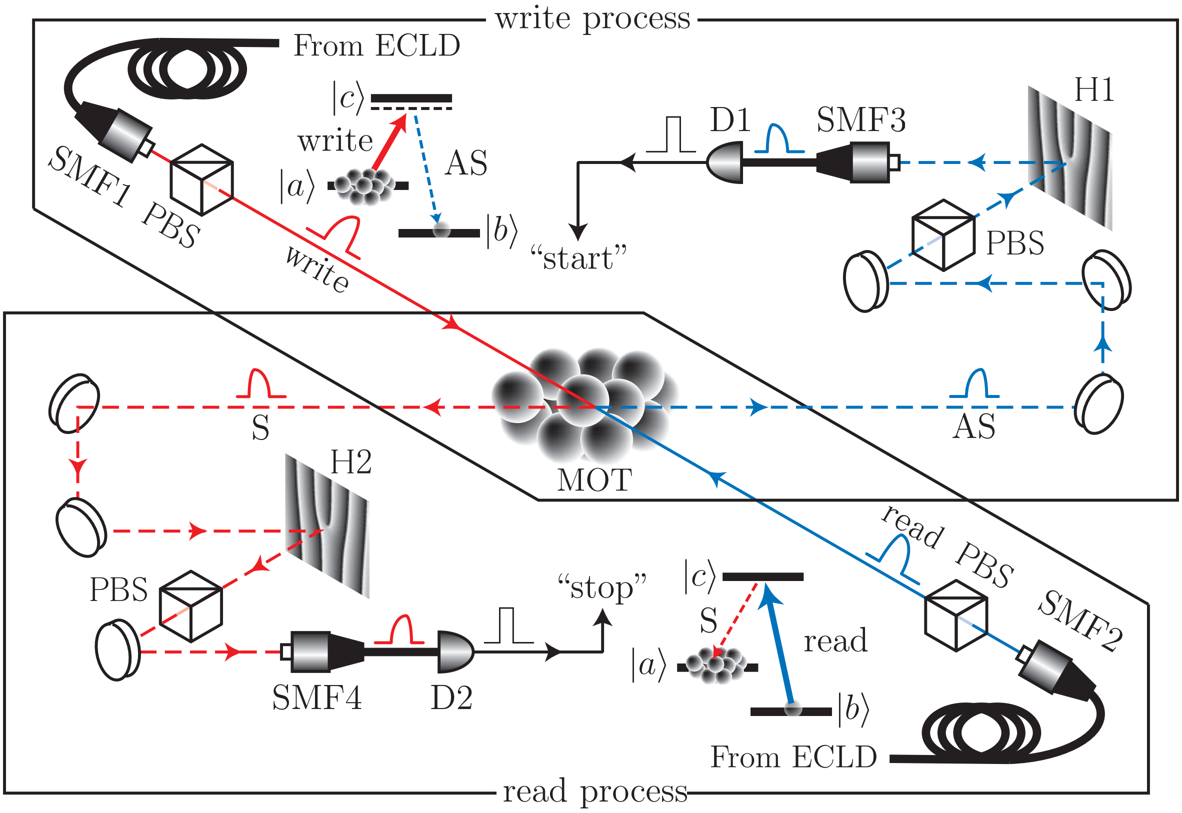

図 4.2　実験系の模式図．write，read パルスが ^{87}Rb 原子集団 (MOT) に 照射され，相関を持ったアンチストークス (AS)，ストークス (S) 光子対を生成する．SMF1，2，3，4，単一モードファイバー; H1，H2，ホログラム; D1，D2，単一光子検出器; PBS，偏光ビームスプリッター．

原子集団の励起状態は，$|a\rangle \rightarrow |c\rangle$ 遷移に共鳴した光パルス read を照射することで Stokes 光子の状態に変換され，読み出される．この過程は電磁誘起透明化を基にした量子メモリの読み出し過程に対応しているため，理想的には変換確率を 1 にできる．read パルスの伝播方向は write パルスの伝播方向と対向しており，S 光子は運動量保存則により要請される位相整合条件 (4.2.1) を満たす方向に散乱される．

$$\boldsymbol{k}_{\mathrm{w}} + \boldsymbol{k}_{\mathrm{r}} = \boldsymbol{k}_{\mathrm{as}} + \boldsymbol{k}_{\mathrm{s}}, \tag{4.2.1}$$

ここで，write パルス, read パルス, Stokes 光子, anti-Stokes 光子の波数ベクトルをそれぞれ $\boldsymbol{k}_{\mathrm{w}}$, $\boldsymbol{k}_{\mathrm{r}}$, $\boldsymbol{k}_{\mathrm{s}}$, $\boldsymbol{k}_{\mathrm{as}}$ とした．図 4.2 のように $\boldsymbol{k}_{\mathrm{w}}$ と $\boldsymbol{k}_{\mathrm{r}}$，$\boldsymbol{k}_{\mathrm{s}}$ と $\boldsymbol{k}_{\mathrm{as}}$ がそれぞれ対向するようにすれば，位相整合条件 (4.2.1) は近似的に満たされる．anti-Stokes 光子, Stokes 光子は対向しているため，原子集団の状態を Stokes 光子の状態に変換した際に軌道角運動量の正負が反転する．

実験のタイムシーケンスや write, read パルスの周波数，偏光，空間モード等は，3 章

のそれと同様なので省略する．重要な相違点は，Stokes, anti-Stokes の光軸上にホログラムが配置され，軌道角運動量に敏感な光子検出 [付録 D] が可能になっている点である．光子検出においては，ホログラムによる回折を受けた後 SMF2 と空間モードが一致し，かつ横偏光の AS 光子だけを選択的に検出した．SMF2 は，MOT の位置でビームウェスト 140 μm の焦点を結び，ホログラムによる変換の結果ガウシアンモードとなった光ビームに対して結合効率が最適化されており，その結合効率はおよそ 75% であった．実験で用いたホログラムは反射型であり，その回折効率は 45% 程度であった．4.2.1 節に示すように，このホログラムと単一モードファイバーを組み合わせることで空間モードに感度を持った光子検出が可能となるが，古典光を用いた予備実験の結果ガウシアンモードと 1 次の LG モード間における消光比はおよそ 1000 : 1 であった．

SMF2，SMF4 に結合した anti-Stokes 光子，Stokes 光子をそれぞれ単一光子検出器 (Perkin-Elmer model SPCM-AQR-14; 検出効率 0.62)D1，D2 に導入し，TTL パルスに変換した．変換された TTL パルスはそれぞれ時間間隔解析器 (TIA; time interval analyzer) の “start”，“stop” 入力に送られる．図 3.4 に示した時間分解光子計数はこのようにして行われた測定結果の一例である．

励起確率は 6.6×10^{-3} であり，この結果は励起確率が十分に低くなければならないという要請を満足している．

4.2.1　測定基底

ガウシアンモードに対して結合効率が最大になるように調整した単一モードファイバーは，ガウシアン以外の，高次の LG モードをカットするフィルターとして寄与する．モード変換器としてのホログラムとモードフィルターとしての単一モードファイバーとを図 4.3 のように組み合わせることで，特定のモードを選択的に透過させるフィルターを形成できる．光軸に対する特異点の位置を調整することで，フィルターを透過させるモードを $|0\rangle$ と $|1\rangle$ の任意の重ね合わせ

$$|0\rangle + \gamma e^{i\phi} |1\rangle \tag{4.2.2}$$

から自由に選べる [付録 D]．これは，偏光自由度に対する $\lambda/2$，$\lambda/4$ 板の回転による変換と，偏光ビームスプリッターによるフィルターとの関係と等価である．

ホログラムは微動ステージに固定されており，入射ビームの光軸に垂直な平面内で自由に動かせる．

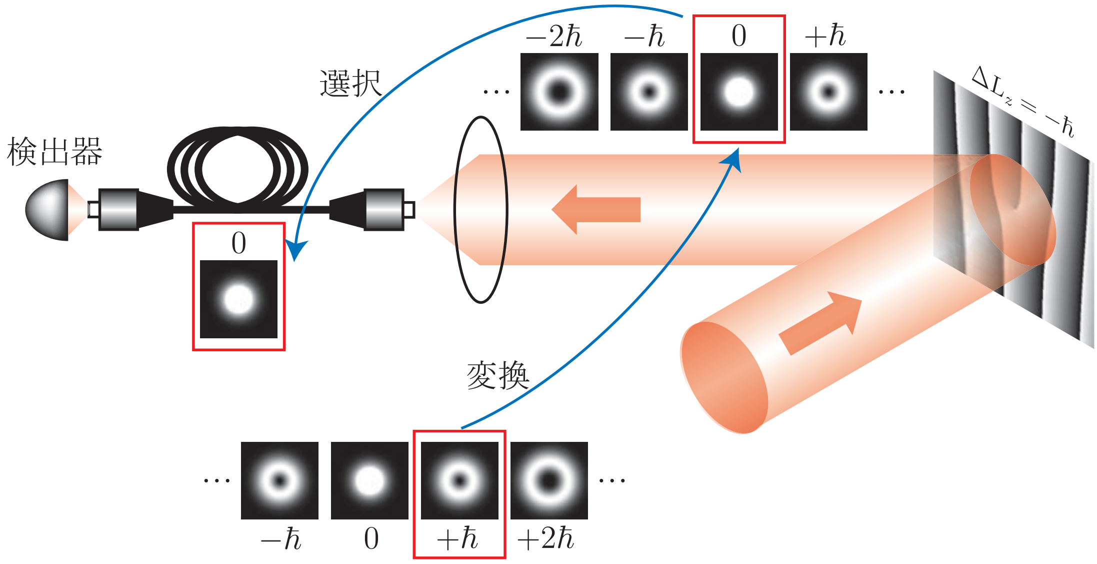

図 4.3　軌道角運動量に感度をもった測定の概念図．重ね合わせについても，同様にガウシアンモードに変換して検出する．特異点の位置を光軸から大きく離せば，ガウシアンモードをそのまま測定できる．

4.2.2　エンタングルメントの有無の評価

エンタングルド状態の本質的な性質として，表現基底以外の正規直交基底でも，測定値に相関が見られることが挙げられる．このことを，最大限エンタングルした状態を例に挙げて説明する．今，2 つの部分系が次のエンタングルした状態にあると仮定する:

$$|\psi\rangle = (|0\rangle|0\rangle + |1\rangle|1\rangle)/\sqrt{2}. \tag{4.2.3}$$

$|0\rangle$, $|1\rangle$ は正規直交基底である．状態を $|0\rangle|0\rangle$, $|0\rangle|1\rangle$, $|1\rangle|0\rangle$, $|1\rangle|1\rangle$ のそれぞれに見出す確率には，次に示すような顕著な相関が期待できる:

$$|\langle 0|\langle 0||\psi\rangle|^2 = 1/2 \tag{4.2.4}$$
$$|\langle 0|\langle 1||\psi\rangle|^2 = 0 \tag{4.2.5}$$
$$|\langle 1|\langle 0||\psi\rangle|^2 = 0 \tag{4.2.6}$$
$$|\langle 1|\langle 1||\psi\rangle|^2 = 1/2 \tag{4.2.7}$$

この状態 $|\psi\rangle$ を，別の正規直交基底 $|+\rangle \equiv (|0\rangle + e^{i\theta}|1\rangle)/\sqrt{2}$, $|\quad\rangle \equiv (|0\rangle \quad e^{i\theta}|1\rangle)/\sqrt{2}$ を使って書き直そう．変換は，

$$\begin{pmatrix} |+\rangle \\ |\quad\rangle \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & e^{i\theta} \\ 1 & \quad e^{i\theta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} |0\rangle \\ |1\rangle \end{pmatrix} \tag{4.2.8}$$

で与えられるので，逆変換は次のようになる:

$$\begin{pmatrix} |0\rangle \\ |1\rangle \end{pmatrix} = \sqrt{2} \begin{pmatrix} 1 & e^{i\theta} \\ 1 & -e^{i\theta} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} |+\rangle \\ |-\rangle \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ e^{-i\theta} & -e^{-i\theta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} |+\rangle \\ |-\rangle \end{pmatrix}. \tag{4.2.9}$$

したがって，

$$\begin{aligned} |\psi\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|0\rangle |0\rangle + |1\rangle |1\rangle \right) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \left[(|+\rangle + |-\rangle)(|+\rangle + |-\rangle) + e^{-i\theta}(|+\rangle - |-\rangle)(|+\rangle - |-\rangle) \right] \\ &= \frac{1+e^{-i\theta}}{2\sqrt{2}} \Big(|+\rangle |+\rangle + |-\rangle |-\rangle \Big) + \frac{1-e^{-i\theta}}{2\sqrt{2}} \Big(|+\rangle |-\rangle + |-\rangle |+\rangle \Big). \end{aligned} \tag{4.2.10}$$

状態を $|+\rangle |+\rangle$, $|+\rangle |-\rangle$, $|-\rangle |+\rangle$, $|-\rangle |-\rangle$ のそれぞれに見出す確率は，次のように計算できる:

$$|\langle +| \langle +| |\psi\rangle|^2 = \frac{1+\cos\theta}{4} \tag{4.2.11}$$

$$|\langle +| \langle -| |\psi\rangle|^2 = \frac{1-\cos\theta}{4} \tag{4.2.12}$$

$$|\langle -| \langle +| |\psi\rangle|^2 = \frac{1-\cos\theta}{4} \tag{4.2.13}$$

$$|\langle -| \langle -| |\psi\rangle|^2 = \frac{1+\cos\theta}{4} \tag{4.2.14}$$

$\theta = 0$ のとき $|0\rangle$, $|1\rangle$ の場合とまったく同様の相関が，$\theta = \pi/2$ のとき $|0\rangle$, $|1\rangle$ の場合と逆の相関が見られることがわかる．

一方で，次の古典的な相関を持った状態 ρ でも，$|0\rangle$, $|1\rangle$ に関してはエンタングルした状態 $|\psi\rangle$ と同様の相関が期待される．

$$\rho = \frac{1}{2} \Big(|0_a\rangle |0_b\rangle \langle 0_a| \langle 0_b| + |1_a\rangle |1_b\rangle \langle 1_a| \langle 1_b| \Big). \tag{4.2.15}$$

しかし，この状態を正規直交基底 $|+\rangle \equiv (|0\rangle + e^{i\theta} |1\rangle)/\sqrt{2}$, $|-\rangle \equiv (|0\rangle - e^{i\theta} |1\rangle)/\sqrt{2}$ を使って書き直すと

$$\begin{aligned} \rho = &\frac{1}{4} \Big(|+_a\rangle |+_b\rangle \langle +_a| \langle +_b| + |+_a\rangle |-_b\rangle \langle +_a| \langle -_b| \\ &\qquad + |-_a\rangle |+_b\rangle \langle -_a| \langle +_b| + |-_a\rangle |-_b\rangle \langle -_a| \langle -_b| \Big) \end{aligned}$$

となり，状態を $|+\rangle |+\rangle$, $|+\rangle |-\rangle$, $|-\rangle |+\rangle$, $|-\rangle |-\rangle$ のそれぞれに見出す確率はいずれも等しく 1/4 である．すなわち，古典的には $|\psi\rangle$ のような相関が見られない．

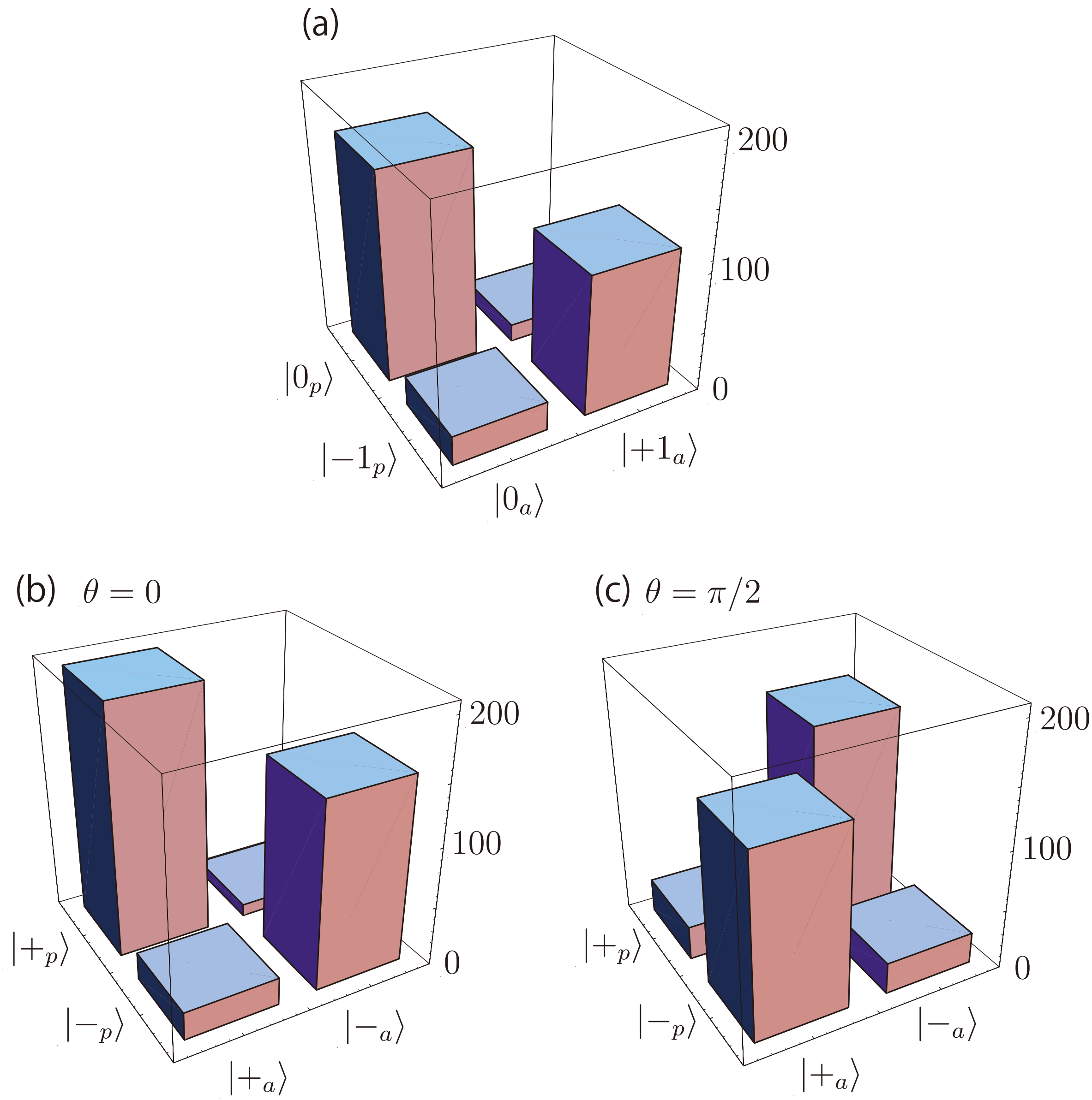

図 4.4　複数の直交基底で測定した光子計数値．それぞれの測定時間は 100 s である．(a) 式 (4.1.3) 中の基底で測定された光子計数値．(b),(c) $|+\rangle = (|0\rangle + e^{i\theta}|\pm1\rangle)/\sqrt{2}$, $|-\rangle = (|0\rangle - e^{i\theta}|\pm1\rangle)/\sqrt{2}$ として，$\theta = 0, \pi/2$ のそれぞれで測定された光子計数値．(a)〜(c) のそれぞれで明らかな（反）相関が見られ，この結果から被測定状態がエンタングルド状態であることがわかる．

この評価を本実験で得られる原子集団-光子の対に対して行った結果を図 4.4 に示す．3 通りの基底のそれぞれで明らかな相関が見られ，先に述べたように，これはエンタングルした状態に特有の相関であると言える．

続いて，相関の有無を定量的に評価する．図 4.4 の (b), (c) に示した光子計数値は，光子のフラックスを N, 被測定状態の密度行列を ρ として，次のように表せる．

$$\begin{aligned} n_{++} &\equiv N \langle +_a | \langle +_p | \rho | +_a \rangle | +_p \rangle \\ n_{+-} &\equiv N \langle +_a | \langle -_p | \rho | +_a \rangle | -_p \rangle \\ n_{-+} &\equiv N \langle -_a | \langle +_p | \rho | -_a \rangle | +_p \rangle \\ n_{--} &\equiv N \langle -_a | \langle -_p | \rho | -_a \rangle | -_p \rangle \end{aligned}$$

(b) については，

$$p \equiv \frac{n_{++} + n_{--}}{n_{++} + n_{+-} + n_{-+} + n_{--}} \tag{4.2.16}$$

で定義される p が相関の大きさに相当する値である．同様に (c) については，

$$q \equiv \frac{n_{+-} + n_{-+}}{n_{++} + n_{+-} + n_{-+} + n_{--}} \tag{4.2.17}$$

で定義される q によって相関の大きさを評価できる．p, q はそれぞれ, 相関が最大のときに 1 を, 相関が最小 $(n_{++} = n_{+-} = n_{-+} = n_{--})$ のときに 1/2 をとる．付録 F.1.5 に示したように，p, q は最大エンタングルド状態 $|\mathrm{MES}\rangle = |\psi(1)\rangle = (|0_a\rangle |0_p\rangle + |{+1_a}\rangle |{-1_p}\rangle)/\sqrt{2}$ に対するフィデリティーと関連する値である．すなわち，

$$\langle \mathrm{MES} | \rho | \mathrm{MES} \rangle \geq p + q - 1 \tag{4.2.18}$$

という関係がある．図 4.4 のデータからこの値を計算すると $p + q - 1 = 0.70 \pm 0.08$ であった．また，付録 F.1.4 に示したように，ρ がエンタングルド状態であるための十分条件は $\langle \mathrm{MES} | \rho | \mathrm{MES} \rangle > 1/2$ である．したがって，

$$\langle \mathrm{MES} | \rho | \mathrm{MES} \rangle \geq p + q - 1 = 0.70 \pm 0.08 > 1/2 \tag{4.2.19}$$

は被測定状態が確かにエンタングルド状態であることを意味する．

4.2.3　密度行列の再構築と EoF

原子集団と光子との複合系の状態を明らかにするために，量子トモグラフィー [付録 E] を行った．再構築された密度行列を図 4.5 に示す．

(a) には 4 本の特徴的なピークが見られる．特に非対角項の 2 つはエンタングルした状態に特有のものである．エンタングルメントを定量的に評価するための指標として，

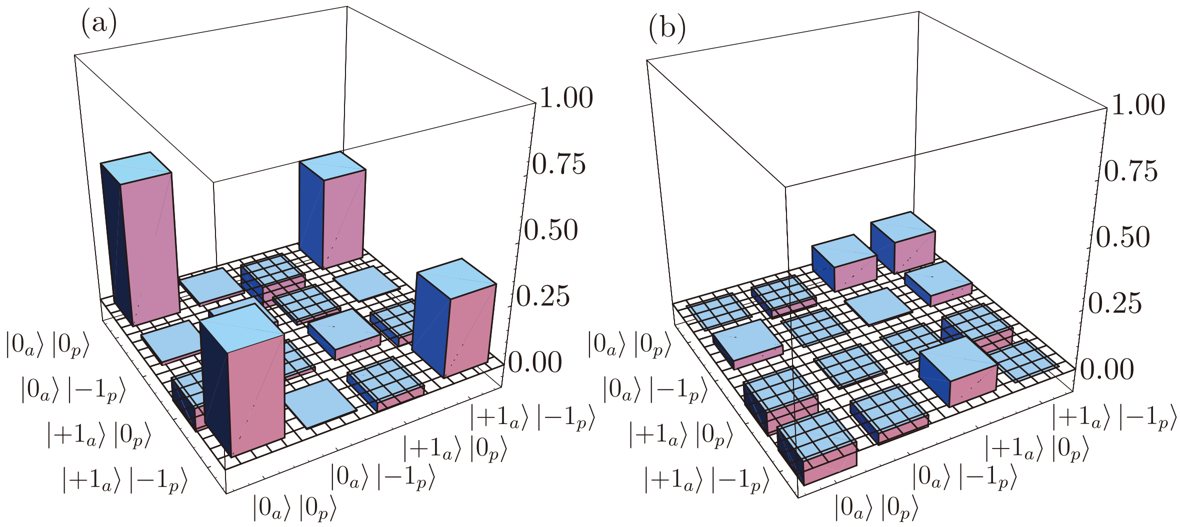

図 4.5　再構築された密度行列の実部 (a) と虚部 (b)．(a) には 4 本の特徴的なピークが見られ，特に非対角項の 2 つはエンタングルした状態に特有のものである．

Entanglement of Formation (EoF)[付録 F.2.2] がある．ある混合状態の EoF は，その混合状態を局所操作と古典通信で作るために必要な最大エンタングルド状態の個数の下限を意味する．例えば，まったくエンタングルしていない状態であればその状態を作るうえでエンタングルド状態は不要であるから EoF は 0 であり，最大エンタングルド状態であればその状態を作るために最大エンタングルド状態が 1 つ必要なので EoF は 1 である．本実験で再構築された密度行列 (図 4.5) から計算された EoF は 0.76 ± 0.17 であった．誤差は，光子計数値にポアソン揺らぎと基底の不確かさ [付録 D.4.4] に伴う誤差が含まれると考え，付録 F.2.2 に示した方法で計算した．

4.3　考察と展望

本実験で得られた密度行列の EoF は，PDC で生成された光子対における偏光自由度に関するエンタングルド状態の EoF(例えば [74]) と比較して低い値である．その原因としては，

- 相対振幅のアンバランス
- 原子集団のデコヒーレンス
- 迷光の寄与

が挙げられる．式 (4.1.3) で定義した $|\psi(\gamma)\rangle$ と得られた密度行列 ρ のフィデリティー $\langle\psi(\gamma)|\rho|\psi(\gamma)\rangle$ が $\gamma_0 = 0.74e^{i0.11\pi}$ で最大値をとることから，得られた状態に最も近い

純粋状態は $|\psi(\gamma_0)\rangle$ である．この純粋状態は相対振幅のアンバランスを反映している．$|\psi(\gamma_0)\rangle$ の EoF は 0.94 であり，これは ρ の EoF である 0.76 と比較して非常に大きい．このことから，EoF を低下させた主要因は複素振幅のアンバランスではなく，デコヒーレンスあるいは迷光の寄与による純粋度の低下であると推察される．ρ の純粋度は 0.92 であった．原子集団のコヒーレンス時間を制限する要因としては，原子の運動，ラーモア歳差運動の 2 つが挙げられる．レーザー冷却された原子集団は希薄であり，衝突の影響が現れるためには秒オーダーの時間が必要なので，原子間の衝突については無視できる．保存時間 100 ns に近い可能性があるのは，原子集団に刻まれた屈折率グレーティングの 1 周期を横切るのに要する時間だろう．今，この周期は 10 μm のオーダーである．原子集団の温度がドップラー冷却限界の 140 μK であると仮定すると，ある原子が 10 μm 移動するのに必要な時間は 100 μs のオーダーである．本実験における残留磁場は 200 mG 程度であったが，この磁場中での ^{87}Rb の基底準位におけるラーモア歳差運動の周期は 5 μs 程度である．原子集団が複数のゼーマン副準位に分布している本実験においては，このラーモア歳差運動の影響が支配的であろうと予想される．磁場遮蔽された環境中であるにも関わらず 200 mG もの残留磁場があるのは，アンチヘルムホルツコイルを固定するためのジグに流れる誘導電流の影響があったためである．コイルのジグを非金属にすることによって誘導電流の影響を回避することが可能であり [付録 G.2.2]，この改善によってコヒーレンス時間を劇的に長くすることが可能になると期待される．また，本実験において迷光の寄与が無視できないことを示す客観的な根拠としては，第 3 章に示した，強度相関の測定結果と励起確率から期待される値との乖離が挙げられる．以上から，本実験において EoF を制限しているのは残留磁場と迷光による純粋度の低下であり，誘導電流の影響の回避と消光比の向上を行うことでより理想的なエンタングルメントが得られるだろうことが推察される．

前述のように複素振幅のアンバランスの影響は比較的小さいが，これをバランスさせることは，原子集団と光の相互作用領域の形状を最適化することで達成できると期待される [75]．この最適化を行うことで，原理的には最大エンタングルド状態にいくらでも近い状態を得ることが可能となるだろう．

本実験では，原子集団と光子とが軌道角運動量に関してエンタングルした状態にあることが確認された．しかし，軌道角運動量状態を用いる優位性としてのエンタングルメントの多次元性を評価するには至らなかった．密度行列の再構築には，密度行列の次元の 2 乗の測定値が必要となる．4×4 の密度行列で記述される 2 者間 2 次元エンタングルメントは 16 通りの測定値で十分だが，9×9 の密度行列で記述される 2 者間 3 次元エンタングルメントでは少なくとも 81 通りの測定値が要求される．この測定を行うためには実験系の安定度の向上と光子のフラックスの増大が不可欠であり，第 5 章で示すように様々な改善を行うこととなった．

第 5 章

実験 III: 冷却原子集団を用いた条件付単一光子の生成

電磁場のエネルギーの量子化という概念は 1900 年に Planck によって黒体輻射を説明するために導入され，その実体としての光子は，1905 年の Einstein による光電効果に関する論文によって広く認知されるようになった．しかし，その後しばらくの間，この光子という概念が理論的研究の発展の中で果たした役割は小さかった．なぜなら，物質をのみ量子化し電磁場は古典的に取り扱う半古典論によって，当時観察することが可能だった現象を説明するのに十分なモデルが得られていたためである [76].

単一光子数状態は，Clauser によって 1974 年にカルシウム原子からのカスケード散乱を利用して初めて観察された [77]．これは，カスケード的に散乱される光子対が 3 章で示した光子対と同様の相関を持っていることを利用し，対の一方が検出されたときに，もう一方が単一光子に近い状態になることを利用した実験である．この描像は，同様の光子対を用いて行われた Grangier らの 1986 年の実験 [78] によってよりいっそう明確になった．Grangier らの実験では，光子対のうちの一方の光子が検出された場合で条件付けされたときのもう一方の光子の強度相関が 1 を有意に下回るばかりか，励起確率が低い極限で 0 に近い値をとることが示された．彼らの導入した条件付の強度相関は反相関パラメター (anti-correlation parameter) と呼ばれている．その後の Kwiat らによるパラメトリック下方変換 (PDC) を用いた 1991 年の実験 [79] では，0.08 ± 0.04 という当時としては極めて低い反相関パラメターが報告された．

単一光子数状態としては，線形光学素子による効率的な量子計算機 [80] や量子暗号の無条件安全性 [12] で重要な役割を果たすため，on-demand な性質を持ったものが強く望まれている．しかしながら，カスケード散乱や PDC を用いた単一光子生成は確率的にしか行えず，単純には on-demand になり得ない．PDC で生成された単一光子については量子メモリの技術が確立され [72]，実質的に on-demand な単一光子源として利用可能な

段階に到達してはいるものの，極限的な周波数フィルタリングを要するこの手法では光子のフラックスの低下が不可避である．

On-demand な単一光子源開発のそのほかのアプローチとしては，量子ドット [81,82], 単一の原子・イオンからの蛍光 [83,84], N-V center [85] が挙げられる．しかし，これらの手法もまたそれぞれの問題を抱えており，2009 年現在でも on-demand な単一光子源の開発は現実的な量子情報処理に向けた主要な課題のひとつである．

我々と同様の，原子集団と光の集団的相互作用を利用した系では，2004 年に初めて条件付単一光子源としての評価が行われ，報告された反相関パラメターは 0.25 程度であった [64]．その後 2005 年に，同様の系で 0.14 ± 0.11 が報告されている [36]．1 次元光格子を援用した系における 2008 年の報告 [66] では，0.02 ± 0.01 が報告されている．集団相互作用を用いる系での励起も PDC などと同様に確率的なものであるが，対の一方の状態が原子集団に保存されている我々の系では，励起が確認された場合に光子の読み出しが行われないようにフィードバックを行うことで on-demand な単一光子源を比較的容易に構成できる．この機能を実装した実験 [86] は 2006 年に報告され，反相関パラメターは 0.057 ± 0.028 であった．

本章に示す実験は，励起が行われた条件のもとで測定されたエンタングルド状態が単一励起間のそれであることを示すために計画された．同時に，3 次元エンタングルメントの評価に向けて，光子対の純粋度やフラックスを向上させることも目的とした．すなわち，on-demand 性については追求しておらず，本質的には前述の先行研究の追試にとどまるものである．しかし，本実験で得た反相関パラメターは最小で 0.017 ± 0.009 であり，シンプルな構成でありながら，1 次元光格子を用いた実験 [66] と同等の性能を持った系を構築することに成功した．

5.1　理論

3.1 の議論とまったく同様にして，原子集団と光の集団相互作用によって励起される光子対の状態は次のように書ける:

$$
\begin{aligned}
|\psi\rangle &= U\,|0_1\rangle\,|0_2\rangle = \frac{1}{\cosh r}\sum_{n=0}^{\infty}(-\tanh r)^n\,|n_1\rangle\,|n_2\rangle\,, \\
U &= \exp\left[r(\hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2^\dagger - \hat{a}_1\hat{a}_2)\right].
\end{aligned}
\tag{5.1.1}
$$

ここで，$|n_i\rangle$ はモード i の n 光子数状態，$\hat{a}_i$ はモード i の光子の消滅演算子，$\tanh^2 r$ は励起確率である．

モード 1 の光子が検出される事象を T, モード 2 の光子をビームスプリッターで 2 つに分け，それぞれで検出される事象を A, B と表す．強度相関関数 $g^{(2)} = \langle \hat{a}^\dagger\hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{a}\rangle \,/\, \langle \hat{a}^\dagger\hat{a}\rangle^2$

の分子が単一モードの 2 光子の同時検出確率，分母が単一モードの 1 光子の検出確率の 2 乗になっている点に注意すると，モード 1 の光子検出で条件付けされたときのモード 2 の強度相関は次のように表せる．

$$\alpha = \frac{P(A \cap B|T)}{P(A|T)P(B|T)}. \tag{5.1.2}$$

ここで，$P(X \cap Y)$ は事象 X と事象 Y の同時確率，$P(X|T)$ は事象 X の事象 T による条件付確率である．このように定義された α を反相関パラメターと呼ぶ．条件付確率と同時確率は $P(X \cap T) = P(T)P(X|T)$ で関係付けられる．これを用いると，α は次のように書き換えられる:

$$\begin{aligned}\alpha &= \frac{P(A \cap B|T)}{P(A|T)P(B|T)} \\ &= \frac{P(A \cap B \cap T)}{P(T)} \frac{P(T)P(T)}{P(A \cap T)P(B \cap T)} \\ &= \frac{P(T)P(A \cap B \cap T)}{P(A \cap T)P(B \cap T)}. \end{aligned} \tag{5.1.3}$$

これを演算子の期待値で書き直すと，次式を得る:

$$\alpha = \frac{\langle \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1 \rangle \langle \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_1 \hat{a}_2 \hat{a}_2 \rangle}{\langle \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_1 \hat{a}_2 \rangle^2}. \tag{5.1.4}$$

式 (5.1.1) における α を計算しよう．$\langle \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1 \rangle$，$\langle \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_1 \hat{a}_2 \rangle$ は式 (3.1.18)，式 (3.1.23) そのものである．$\langle \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_1 \hat{a}_2 \hat{a}_2 \rangle$ についても式 (3.1.20) を用いることで，次のように計算できる:

$$\begin{aligned}\langle \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_1 \hat{a}_2 \hat{a}_2 \rangle &= \langle 0_1 | \langle 0_2 | U^\dagger \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_1 \hat{a}_2 \hat{a}_2 U | 0_1 \rangle | 0_2 \rangle \\ &= | U^\dagger \hat{a}_1 U U^\dagger \hat{a}_2 U U^\dagger \hat{a}_2 U | 0_1 \rangle | 0_2 \rangle |^2 \\ &= 2 \sinh^4 r (2 \cosh^2 r + \sinh^2 r). \end{aligned} \tag{5.1.5}$$

したがって，α は以下のように与えられる:

$$\begin{aligned}\alpha &= \frac{\sinh^2 r \cdot 2 \sinh^4 r (2 \cosh^2 r + \sinh^2 r)}{(\sinh^2 r (\cosh^2 r + \sinh^2 r))^2} \\ &= \frac{2 \tanh^2 r (2 + \tanh^2 r)}{(1 + \tanh^2 r)^2}. \end{aligned} \tag{5.1.6}$$

また，式 (3.1.24) に示された $g_{12}^{(2)} = 1 + 1/\tanh^2 r$ を用いて α を表すと次式を得る:

$$\alpha = \frac{2}{g_{12}^{(2)}} \left(2 - \frac{1}{g_{12}^{(2)}} \right). \tag{5.1.7}$$

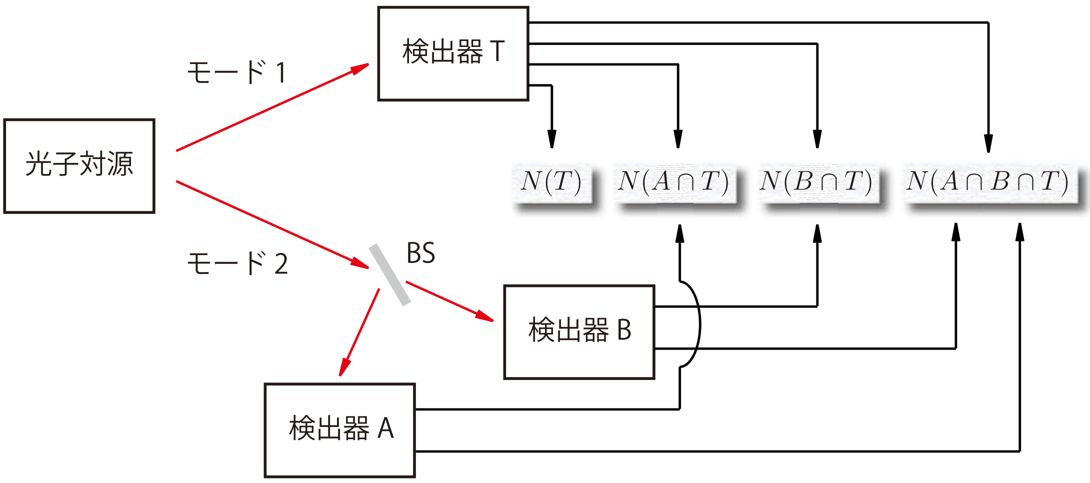

図 5.1　反相関パラメター測定の概念図．BS はビームスプリッター．

続いて，反相関パラメータ 5.1.3 を実験的に評価する手法を考える．光子対のフラックスを N として確率 $P(X)$ に対応する光子計数値 $N(X) = N\cdot P(X)$ を用いると，式 (5.1.3) は次のように表せる．

$$\alpha = \frac{N(T)N(A\cap B\cap T)}{N(A\cap T)N(B\cap T)}. \tag{5.1.8}$$

したがって，図 5.1 に示したように測定を行うことで，反相関パラメターの評価が可能であろうと予想される．

しかし，現実の光子検出器は光子数に敏感でないため，式 (5.1.4) に与えた演算子の期待値による表現と完全には対応しない．そこで，式 (B.2.4) に与えた現実の光子検出器の測定演算子 $\Pi_{\geq 1}$[*1]を用いて式 (5.1.3) を評価することを試みる．具体的には，$\Pi_{\geq 1}$ による測定が測定値 1 を返すことによって条件付けられたときのモード 2 の状態を書き下し，その状態の強度相関を評価する．この描像は，図 5.1 に示した概念図と完全に対応している．

$\Pi_{\geq 1}$ で与えられた測定が行われたことが既知であるとき[*2]，モード 1 に作用する測定演算子 $\Pi_{\geq 1}$ のクラウス表現を $\Pi_{\geq 1} = M^\dagger M$ として，測定後のモード 2 の状態 ρ は次のように与えられる:

$$\rho = \frac{\mathrm{Tr}_1\left[(M\otimes 1)\,|\psi\rangle\langle\psi|\,(M^\dagger\otimes 1)\right]}{\mathrm{Tr}\left[(M\otimes 1)\,|\psi\rangle\langle\psi|\,(M^\dagger\otimes 1)\right]}. \tag{5.1.9}$$

[*1] $\Pi_{\geq 1} = 1 \quad \Pi_0 = \sum_{m=0}^{\infty} 1 \quad e^{\ \nu}(1 \quad \eta)^m\big)\,|m\rangle\langle m|$ は，ダークカウントレート ν，検出確率 η のもとで，光子が 1 つ以上検出された場合に 1 を返す演算子である．
[*2] $\Pi_{\geq 1}$ に対応する測定値が得られたことを知っているとき

ここで，$\mathrm{Tr}_1[\cdot]$ はモード 1 に対する部分トレースを意味する．モード 2 への作用が項等演算子であることを用いると，ρ をクラウス表現を使わずに次のように表せる:

$$\rho = \frac{\mathrm{Tr}_1\left[(\Pi_{\geq 1}\otimes 1)\left|\psi\right\rangle\!\left\langle\psi\right|\right]}{\mathrm{Tr}\left[(\Pi_{\geq 1}\otimes 1)\left|\psi\right\rangle\!\left\langle\psi\right|\right]}. \tag{5.1.10}$$

$\mathrm{Tr}_1\left[(\Pi_{\geq 1}\otimes 1)\left|\psi\right\rangle\!\left\langle\psi\right|\right]$ は次のように計算できる．

$$\begin{aligned} N_0\cdot\rho &\equiv \mathrm{Tr}_1\left[(\Pi_{\geq 1}\otimes 1)\left|\psi\right\rangle\!\left\langle\psi\right|\right] \\ &= \mathrm{Tr}_1\left[((1-\Pi_0)\otimes 1)\left|\psi\right\rangle\!\left\langle\psi\right|\right] \\ &= \mathrm{Tr}_1\left[\left|\psi\right\rangle\!\left\langle\psi\right|\right] - \mathrm{Tr}_1\left[(\Pi_0\otimes 1)\left|\psi\right\rangle\!\left\langle\psi\right|\right] \\ &= \frac{1}{\cosh^2 r}\sum_{n=0}^{\infty}(\tanh^2 r)^n \left|n\right\rangle\!\left\langle n\right| - \frac{1}{\cosh^2 r}\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\nu}(1-\eta)^n(\tanh^2 r)^n\left|n\right\rangle\!\left\langle n\right|. \end{aligned} \tag{5.1.11}$$

ここで，ν はダークカウントレート，η は検出確率である．規格化因子 N_0 は次のようになる:

$$N_0\mathrm{Tr}[\rho] = 1 - \frac{e^{-\nu}}{\cosh^2 r}\frac{1}{1-(1-\eta)\tanh^2 r} = 1 - \frac{e^{-\nu}(1-\tanh^2 r)}{1-(1-\eta)\tanh^2 r}. \tag{5.1.12}$$

$0 \leq \tanh r \leq 1$ から $p = \tanh^2 r$ と置いてまとめると，次式を得る．

$$N_0\cdot\rho = (1-p)\sum_{n=0}^{\infty}p^n\left|n\right\rangle\!\left\langle n\right| - (1-p)\sum_{n=0}^{\infty}e^{-\nu}(1-\eta)^n p^n\left|n\right\rangle\!\left\langle n\right|. \tag{5.1.13}$$

右辺の 1 つ目の和を ρ_{th}，2 つ目の和を ρ_{diff} とする．ρ_{th} はサーマル光の密度行列そのものである．また，ρ_{diff} は得られる状態 ρ のサーマル光からのずれを意味している．ダークカウントレート ν が大きいとき，ρ_{th} に対する ρ_{diff} の寄与は小さくなる．すなわち，ν が大きい場合，ρ はサーマル光となる．これはモード 1 を単にトレースアウトする場合と同様であり，ダークカウントが多く信号がノイズに埋もれてしまっている状況では条件付けがうまく働かず，そういった測定によってモード 1 に関する情報をモード 2 に反映させることができないことをよく表現している．ρ_{diff} は $(1-\eta)^n$ の寄与によって ρ_{th} より鋭い光子数分布を持つ．このことは ρ_{diff} によって真空の寄与が強く抑圧されることを意味し，ρ の光子数分布は ρ_{th} と比較して劇的に変化する．理想的には単一光子数状態に近くなることが期待される．参考のために光子数分布をプロットした結果を図 5.2 に示す．$n = 0$ 成分を抑圧するには，励起確率と検出確率に対してダークカウントレートを十分低く抑える必要がある．$n > 1$ の成分を抑圧するためには，励起確率を低くする必要がある．図 5.2(b) に一例を示したように，十分低い励起確率のもとで条件付けを行えば，$n = 1$ 成分が支配的な状態を得ることができる．励起確率を十分低くすることで，検出確率，ダークカウントレートによる制限のもとで単一光子数状態に近い光子数分布を持った光を得ることができ，このような光の状態を条件付単一光子数状態と呼ぶ．

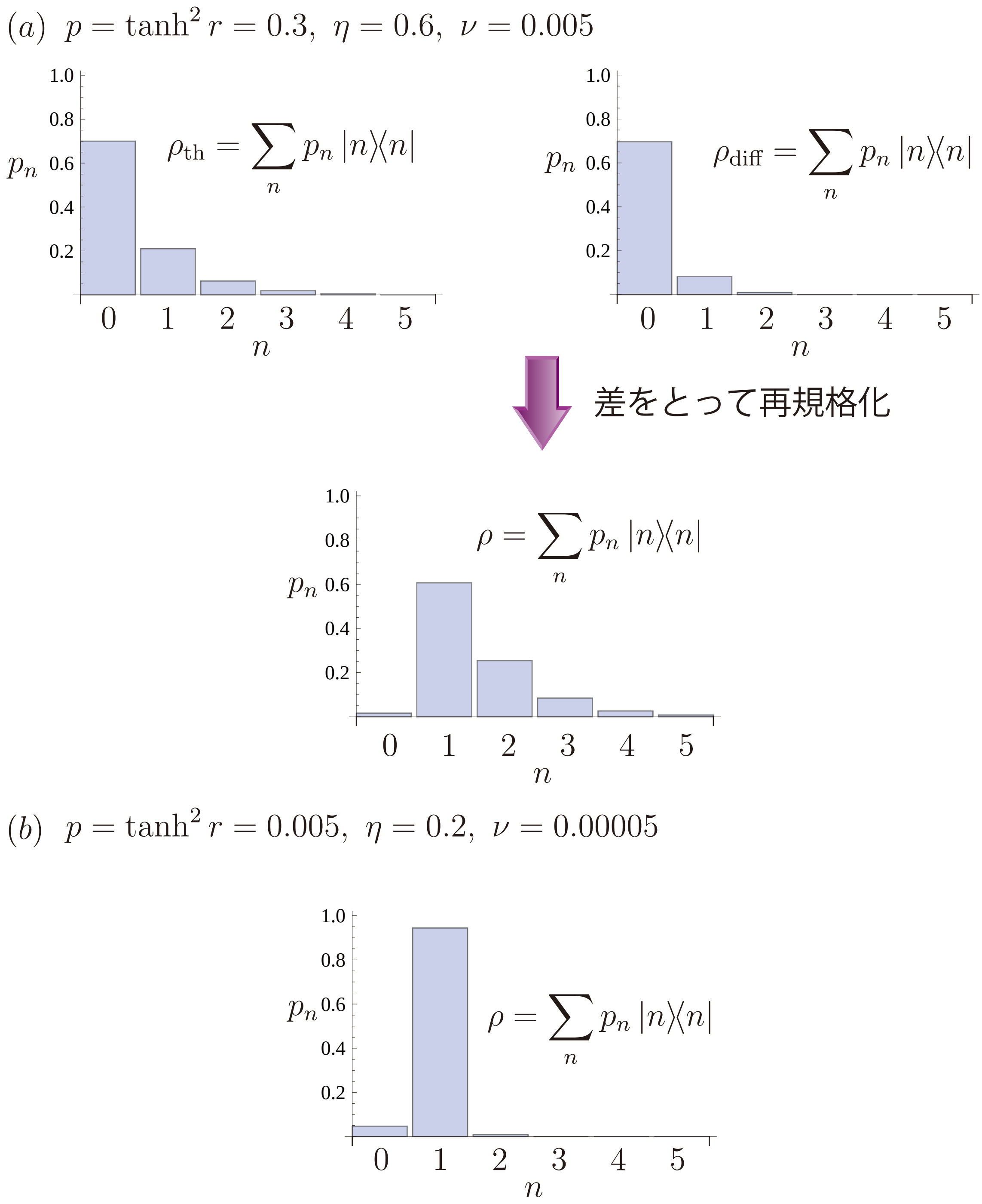

図 5.2　現実的な検出器で条件付けを行った場合に得られる状態．ν, η はそれぞれ条件付けを行う検出器のダークカウントレート，検出確率．p は光子 (対) の励起確率である．

モード 1 への測定によってモード 2 の光子数分布が変化するのは，2 つのモードの初期状態 $|\psi\rangle$ がエネルギーに関してエンタングルしていたことの反映である．また，特に図 5.2(b) のような光子数分布はポアソン分布と比較して大変鋭いものとなっている．このような分布はサブポアソン分布と呼ばれ，分布を鋭くした極限が光子数状態（今の場合は単一光子数状態）である．

今，式 (5.1.11) から，現実的な検出器によって条件付けされたモード 2 の光の光子数分布は次のように与えられる:

$$p_n = \frac{1}{N_0 \cosh^2 r}(1 - e^{-\nu}(1-\eta)^n)(\tanh^2 r)^n. \tag{5.1.14}$$

付録 B.3 と同様の議論から，現実的な検出器を用いて測定されるこの光の強度相関を計算することができて，現実的な反相関パラメター α_{ac} を以下のように表せる:

$$\begin{aligned} A &= e^{-2\nu}\frac{1}{N_0\cosh^2 r}\sum_{n=0}^{\infty}(1-e^{-\nu}(1-\eta)^n)((1-\eta)\tanh^2 r)^n \\ &= \frac{e^{-2\nu}}{N_0\cosh^2 r}\left[\frac{1}{1-(1-\eta)\tanh^2 r} - \frac{e^{-\nu}}{1-(1-\eta)^2\tanh^2 r}\right], \end{aligned} \tag{5.1.15}$$

$$\begin{aligned} B &= e^{-\nu}\frac{1}{N_0\cosh^2 r}\sum_{n=0}^{\infty}(1-e^{-\nu}(1-\eta)^n)((1-\eta/2)\tanh^2 r)^n \\ &= \frac{e^{-\nu}}{N_0\cosh^2 r}\left[\frac{1}{1-(1-\eta/2)\tanh^2 r} - \frac{e^{-\nu}}{1-(1-\eta/2)(1-\eta)\tanh^2 r}\right], \end{aligned} \tag{5.1.16}$$

$$\alpha_{\mathrm{ac}} = g^{(2)}_{\mathrm{ac}} = \frac{1-2B+A}{(1-B)^2} = 1 + \frac{A-B^2}{(1-B)^2}. \tag{5.1.17}$$

ダークカウントレート ν が大きいとき，α_{ac} は

$$\alpha_{\mathrm{ac}} = 1 + \frac{\mathcal{O}(e^{-2\nu}) - \mathcal{O}(e^{-2\nu})}{\mathcal{O}(1)} \tag{5.1.18}$$

と評価できて，1 に近づくことがわかる．α_{ac} の励起確率 $\tanh^2 r$, 検出確率 η, ダークカウントレート ν 依存性を図 5.3 に示す.

式 (5.1.4) で定義された反相関パラメター α と比較して，現実的な検出器を用いた条件付強度相関測定のモデルから計算された「反相関パラメター」あるいは条件付強度相関 α_{ac} は異なる値をとるものの，$\tanh^2 r \to 0$, $\nu \to 0$ の極限では一致する．付録 B.3 で議論されているように，同様の測定のモデルにおいて計算された単一光子数状態の「強度相関」はゼロである (図 B.4)．したがって，実験によってゼロに十分に近い α_{ac} を示すことは，被測定光が単一光子数状態に近いことの証拠となり得る．

励起確率依存性の観点からはこのように α と α_{ac} は定性的に異なる振る舞いを見せる．しかし，式 (5.1.7) の相互強度相関依存性の観点からは，α と α_{ac} が図 5.4 に示すように

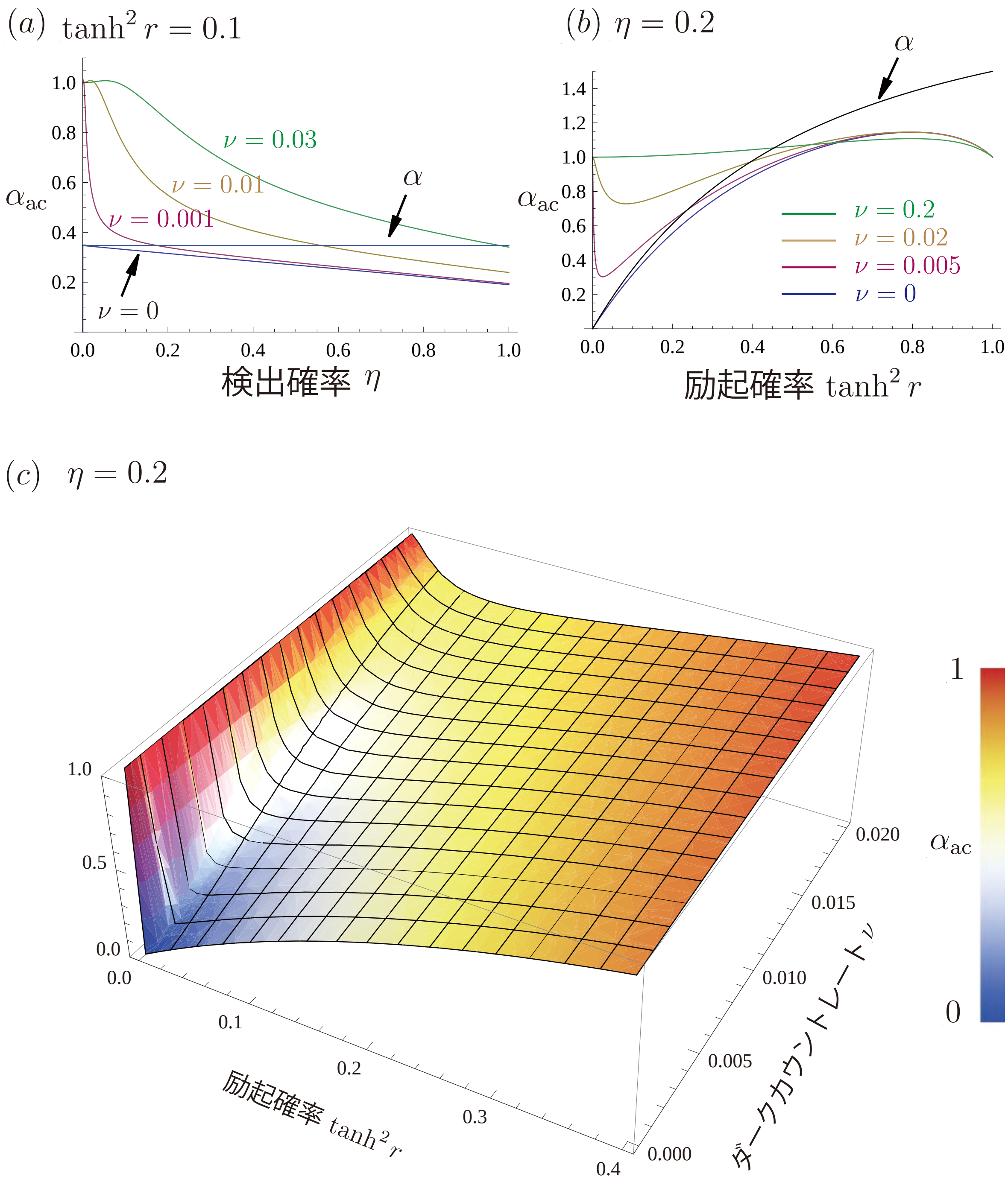

図 5.3　反相関パラメターの励起確率 $\tanh^2 r$，検出確率 η，ダークカウントレート ν 依存性．

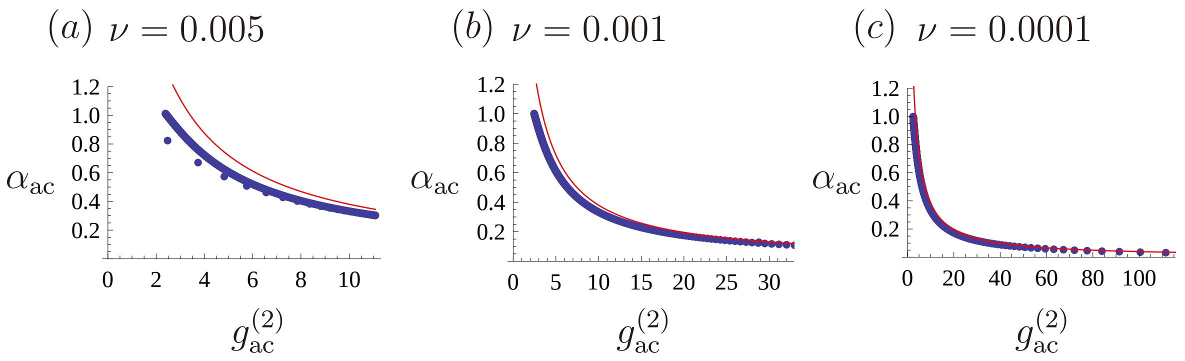

図 5.4 反相関パラメターと相互強度相関．検出確率 $\eta = 0.2$ のもとで励起確率 $\tanh^2 r$ を 0.001 刻みで 0.001 から 0.5 まで変化させながらプロットしたものが各図の青点である．赤い実線はいずれも式 (5.1.7) をそれぞれのスケールでプロットしたものである．

非常に良く似た振る舞いを見せる．実験では，これを確かめることで評価手法や装置の挙動の妥当性を確かめた．

5.2 実験

5.2.1 改良点

実験装置の詳細を説明する前に，3，4 章の装置からの改良点を列挙する．

光学系の安定性向上

これまでの実験では，冷却原子集団が除震台の表面から 200mm 程度の高さにあった．磁気光学トラップのための光学系を工夫し，この高さを $4\,\mathrm{inch} = 101.6\,\mathrm{mm}$ に変更した．

また，これまでの実験では単一モードファイバーへの各種の光の導入にあたって，微調整用のネジがファイバー，対物レンズに取り付けられた装置を用いていた．ファイバーと対物レンズの相対位置についてはメカニカルに固定し，ファイバーへの光の導入に必要なモードマッチのために焦点距離の長い凸レンズを別途用いることで不安定性を改善した．

消光比の向上

検出する対象の光子と励起や読み出しに必要な比較的強いコヒーレント光とを弁別するために，これまでの実験でも両者の光軸間に角度差を設けた．しかし，特に冷却原子集団をトラップするための真空ガラスセルの表面精度がその他の光学素子と比較して悪く，また低反射コートも不可能であったため，このガラスセルへの入出力における乱反射が迷光の主要因となっていた．本実験では，真空ガラスセルに穴を空け，光学研磨・低反射コー

トが施されたウィンドウを取り付けることでこれを改善した．

なお，この改善は前節の理論で導入したダークカウントレート ν を小さくすることに相当する．

読み出し確率の向上

原子集団の集団コヒーレンスを乱す主要因は残留磁場である．これまでの実験でも磁気遮蔽された環境中に冷却原子集団をトラップすることで残留磁場を低く抑えようと試みていたが，コイル支持具に流れる誘導電流のために強い磁場勾配が存在する環境となってしまっていた．本実験では，コイル支持具を非金属とすることでこの問題を改善した [付録 G.2.2].

読み出された光子は原子集団中の多くの原子に対して近共鳴であり，単純にはすぐに吸収されてしまうように思える．この吸収は，読み出しに用いる read と読み出された光子とで電磁誘起透明化 [付録 C.1] を起こすことで回避される．しかし，これまでの実験での，read として $F = 1 \to F' = 2$, 読み出された光子として $F = 2 \to F' = 2$ となる配置では電磁誘起透明化が完全には働かず，大きなロスの原因となっていた．本実験では新たに depumping 光と名づけた光を用意し，これを用いて冷却原子集団を $F = 1$ にポンピングしてやることで電磁誘起透明化の効率を向上させ，読み出し確率を改善した．

なお，これらの改善は前節の理論で導入した検出確率 η を大きくすることに相当する．

繰り返しレートの向上

より短い時間幅の光パルスを用いることで，実験の繰り返しレートを向上させた．この改善によって，（励起確率を低く抑えたうえでの）光子対のフラックスの増大と，実効的なダークカウントレートの低下が期待される．

5.2.2　実験装置

図 5.5 に実験の概要を示した．

原子集団としてレーザー冷却された OD ~ 5 の ^{87}Rb (MOT) を用意した．実験のタイムシーケンスは図 5.5(b) に示したように，原子をロードするための時間（ロード時間: 6 ms）と測定を行うための時間（測定時間: 4 ms）に分けられる．ロード時間においては Cooling 光, Repumping 光, 四重極磁場を用いて磁気光学トラップを行うが，測定時間に移行する前に $5S_{1/2}F = 2 \to 5P_{3/2}F = 2$ に共鳴の depumping 光を 50 μs 照射することで原子を $5S_{1/2}F = 1$ へポンピングした．以前の実験ではコイルジグに流れる誘導電流によって測定時間中にも 200 mG 程度の磁場が残っていたが，非金属のコイルジグを用いた本実験での残留磁場は 1 mG 程度に抑えられている．測定時間においては，500 ns 周期

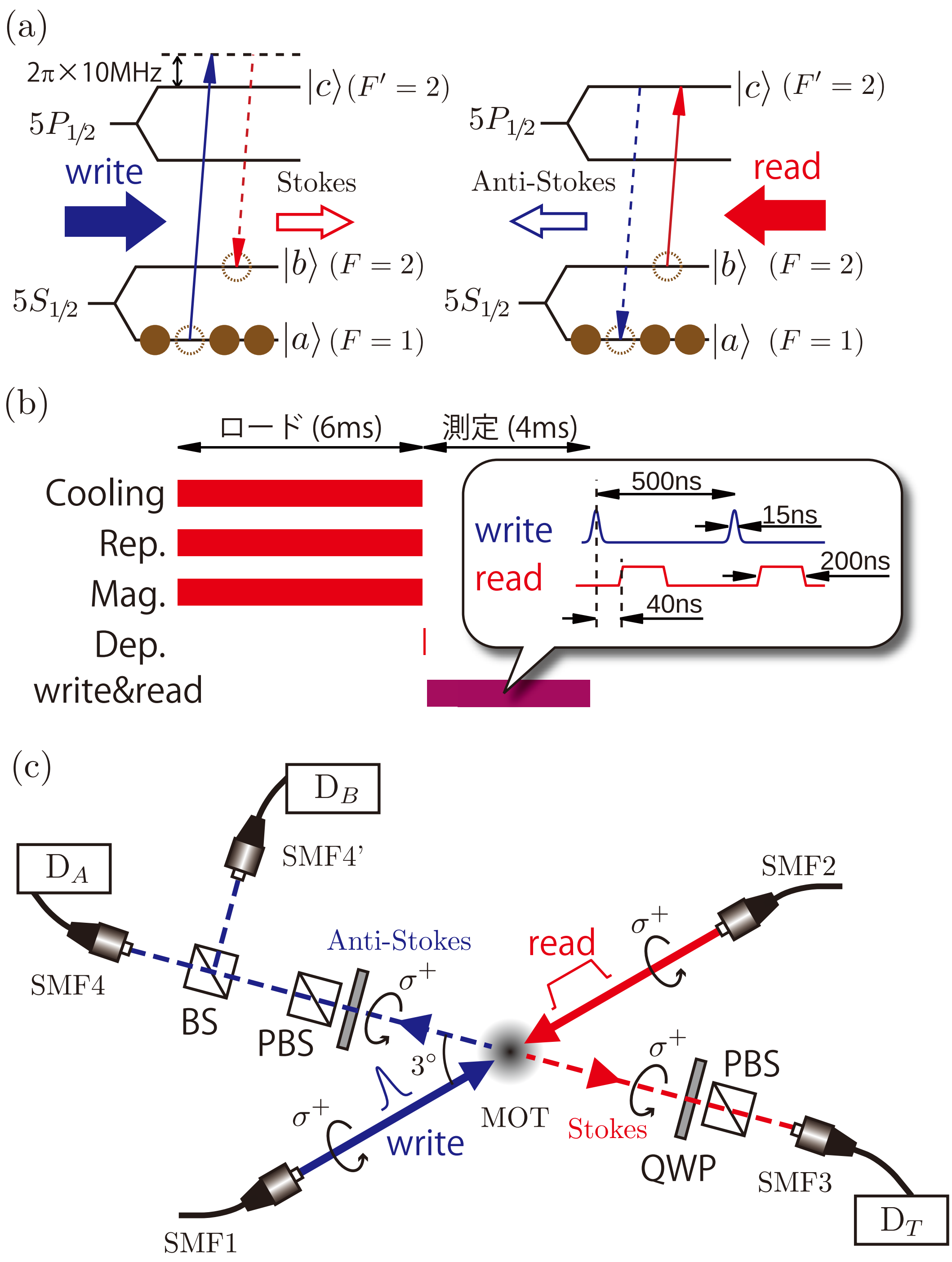

図 5.5　(a) 第 2 章の理論背景と対応付けた ^{87}Rb 原子のエネルギー準位と用いる光の周波数設定．(b) 実験のタイムシーケンス．Rep., Repumping 光; Dep., Depumping 光; Mag., 四重極磁場．Depumping 光は Cooling 光，Repumping 光，磁場が遮断された後，50 μs 照射される．(c) 実験装置の模式図．SMF, 単一モードファイバー; PBS, 偏光ビームスプリッター; BS, ビームスプリッター; QWP, 1/4 波長板; D_T，D_A，D_B，単一光子検出器．

で write pulse，read pulse を MOT に照射した．Write pulse は時間幅 15 ns のガウシアンパルスで，40 ns 遅れて照射される read pulse は時間幅 200 ns の矩形パルスとした．Write pulse の強度を様々に変えることで光子対の励起確率を変化させた．また，read pulse の強度を 500 μW とした．Write pulse の周波数を $5S_{1/2}F = 1 \to 5P_{1/2}F' = 2$ の遷移周波数から $\Delta = 2\pi \cdot 10$ MHz の離調を取ってロックした．MOT の中心でのビームウェストは 400 μm であり，この点で焦点を結ぶように調整した．Read pulse は $5S_{1/2}F = 2 \to 5P_{1/2}F' = 2$ の遷移周波数に周波数ロックされており，write pulse に対向し，空間モードを共有するように光学調整した．Write pulse, read pulse はそれぞれ外部共振器つき半導体レーザー，チタンサファイヤレーザーで準備され，おのおのの空間モードを単一モードファイバー (SMF)1,2 でガウシアンモードに整えた．また，両者の偏光は，原子集団に固定された量子化軸に対して，ともに同じ円偏光 σ^+ とした．

Stokes 光子は，コレクティブエンハンスメントによって主に相互作用領域の長軸方向に散乱される．Stokes 光子を見込む空間モードは，SMF3 で決められる．Stokes 光子を検出する光軸には Write-Read の光軸から 3° の角度差がつけられており，これが MOT の中心で 275 μm のビームウェストの焦点を結ぶように調整した．Anti-Stokes 光子を検出する空間モードは SMF4, SMF4' で決定され，SMF3 と SMF4，SMF3 と SMF4' がそれぞれ空間モードを共有するように調整した．Write pulse, read pulse と同じ円偏光の Stokes, anti-Stokes 光子を選択的に単一光子検出器 (Perkin-Elmer model SPCM-AQR-14; 検出効率 0.62)D_T，D_A，D_B に導入した．これらの検出器からの信号から図 5.1 に示されているように同時計数を測定し，式 (5.1.8) に従って計算することにより，反相関パラメターを算出した．

5.2.3 測定結果

測定された反相関パラメターを同時に測定された相互強度相関に対してプロットした結果を図 5.6 に示した．測定結果は式 (5.1.7) に与えられた理論曲線とよく一致している．なお，測定された反相関パラメターは最小で $0.017 \pm 0.009 \ll 1$ であり，この結果は被測定光が極めて単一光子に近いことを意味している．誤差は光子計数値がポアソン分布に従うことを仮定して算出した標準偏差である．

5.3 考察と展望

図 5.6 に示された実験結果と理論曲線 (5.1.7) の一致は，図 5.3 から明らかなように，ダークカウントレートが小さく，十分な信号雑音比で光子計数が行えていることを期待させる．そこで，単一光子検出器 D_T，D_A，D_B でのダークカウントレートを一定値 ν，

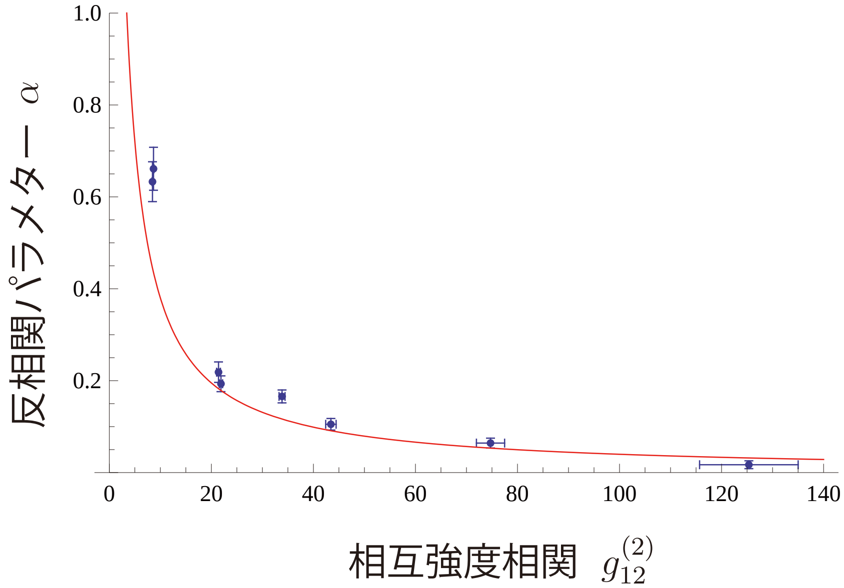

図 5.6 反相関パラメーターの測定結果．測定値を点で示した．各点に付された誤差バーは，光子計数値がポアソン分布に従うことを仮定して算出した標準偏差である．実線は式 (5.1.7) に示された理論曲線である．

D_T での検出確率を η_T，D_A，D_B での検出確率を η として，測定値を最もよく説明するパラメーター $\{\nu, \eta, \eta_T\}$ の組を求めることを試みた．同時に推定されるパラメーターとして，図 5.6 に示した各点に対応する励起確率 $\tanh^2 r$ がある．

推定されたパラメーターは，$\{\nu, \eta, \eta_T\} = \{4.1 \times 10^{-13},\ 3.5 \times 10^{-4},\ 0.53\}$ であった．フィッティングの結果を図 5.7(a) に示した．ここで導入された，ダークカウントと非対称な検出確率を入れたモデルは，図 5.6 との比較から，実験結果を式 (5.1.7) より正しく説明するモデルとなっていることがわかる．なお，推定されたダークカウントレートは同じく推定された検出確率と比較して十分に小さく，この結果は式 (5.1.7) に与えられた理論曲線が測定結果をよく説明していたことを支持するものである．条件付けを行うモードに対する検出確率 $\eta_T = 0.53$ は，単一モードファイバーへの結合効率 (~ 0.75) と単一光子検出器の検出確率 (~ 0.6) の積が 0.45 程度であることを考慮すると，実験状況に概ね合致する値である．一方で，相関を測定する側での検出確率 $\eta = 3.5 \times 10^{-4}$ は非常に小さい．こちらの検出確率には電磁誘起透明化による透過率，write, read, Stokes, anti-Stokes の各モードの波数ベクトルに要請される位相整合条件 $\boldsymbol{k}_w + \boldsymbol{k}_r = \boldsymbol{k}_s + \boldsymbol{k}_{as}$ に対するセットアップの不完全さが影響しており，特に，write と read, Stokes と anti-Stokes の光軸がそれぞれ対向し，それぞに同じ空間モードを共有させるように調整された本実験においては，位相整合の不完全さがこの検出確率を低下させる支配的な要因であろうと予想される．しかし，4 光波混合を利用して位相整合条件を考慮した調整を試みても光子対のフ

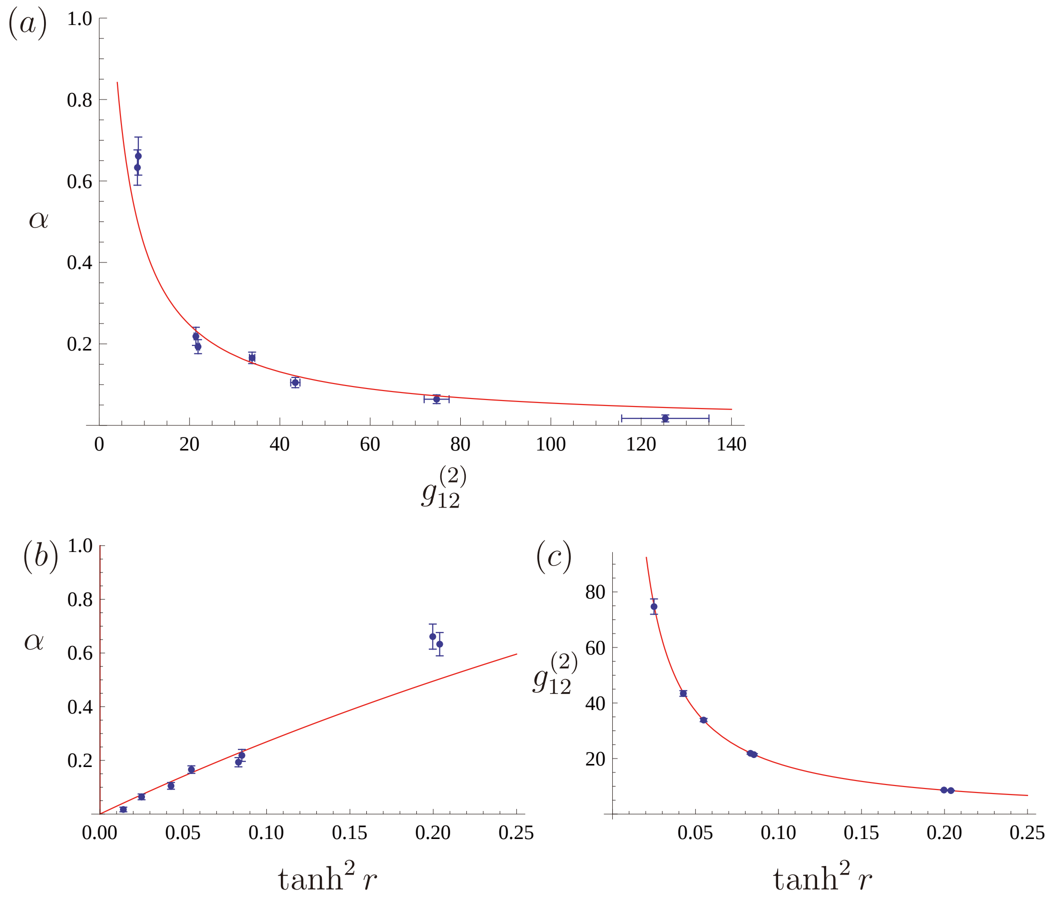

図 5.7　反相関パラメターその他の励起確率依存性．(a) 図 5.6 に示したデータを，非対称な検出確率を仮定し，有限のダークカウントが存在するモデルでフィッティングした結果を実線で示した．(b),(c) はそれぞれ (a) の推定により定められた励起確率の関数としてプロットされた反相関パラメター α, 相互強度相関 $g_{12}^{(2)}$ と，(a) と同じパラメターによる理論曲線（実線）.

ラックスに改善は見られず，この点の改善は今後の課題として残された．図 5.7(b), (c) に，励起確率 $\tanh^2 r$ に対する強度相関，反相関パラメターの振る舞いを示した．

本実験は，条件付単一光子数状態の生成・評価と，高い強度相関を保った上での光子対のフラックスの向上を目的として行われた．条件付単一光子数状態としては，同種の実験 [36, 64, 66, 86] と比較して，反相関パラメター $\alpha = 0.017 \pm 0.009$ を与えるような最も優れた光源が得られたと言える．この結果が得られた背景には，検出確率やダークカウントレートに対する，5.2.1 に示したような徹底的な改善がある．また，第 3, 4 章の実験では相互強度相関 $g_{12}^{(2)} \sim 20$ に対してフラックス $\sim 2(/s)$ であったのに対し，本実験では図 5.8 に示すように $g^{(2)} \sim 20$ に対して 35$(/s)$ 程度のフラックスが得られ，劇的な改善に成功した．

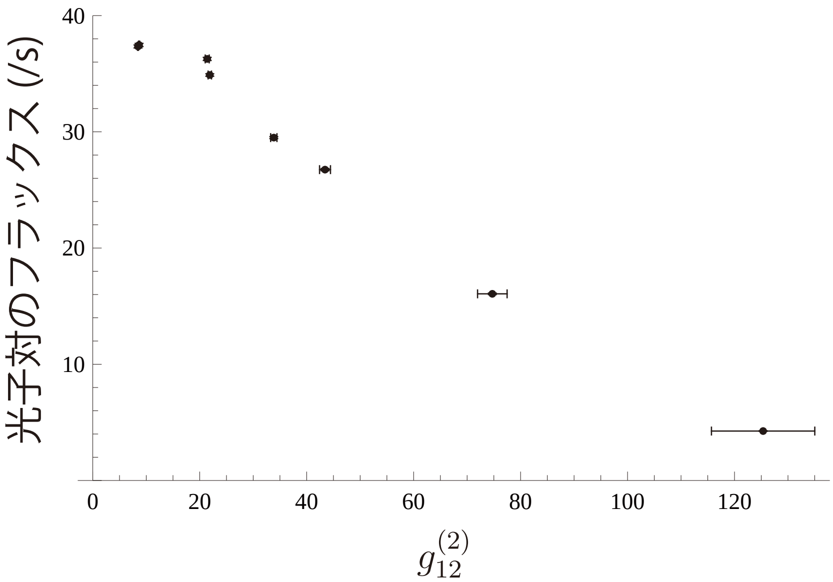

図 5.8　光子対のフラックスと相互強度相関

第 6 章

実験 IV: 軌道角運動量に関する原子集団-光子間 3 次元エンタングルメントの評価

質量を持った，局在させられる量子情報の担体やそれらのエンタングルメントの実現，すなわち量子ネットワークの構築は，現実的な量子情報処理システムの開発における中心的な課題である [27, 56]．Duan, Lukin, Cirac, Zoller らによる原子の集団励起を利用した長寿命で拡張性の高いエンタングルメントの生成，応用を実現する有力なスキーム [32] の提案以来，関連する様々な実験研究が行われている [33–35, 37]．量子情報処理の理論は主に 2 準位の，スピン 1/2 のシステム (qubit) を研究の対象として発展してきたが，最近になって，d 次元の量子系 (qudit, $d \geq 3$) に関してもよく議論されるようになり，qudit を用いたプロトコルの，qubit のそれに対する優位性が指摘されている．例えば，ノイズがある状況における qudit を用いた量子暗号のプロトコルに関して qubit を用いたそれより安全であるといった指摘もあり [55]，ノイジーな量子チャネルが想定される量子ネットワークにおいて，qudit は qubit より適している可能性が示唆されている [56]．2 つの qudit のエンタングルメントについては，Mair らによる先駆的な仕事 [46] 以来，光子の Laguerre-Gaussian (LG) modes を利用した実験研究が行われてきた [47–51]．量子ネットワークの構築という観点では，光子は量子情報の担体として優れている一方で，ある地点に留めておくことが困難であるためにノードとして利用できない点が問題となる．

第 4 章の実験では，原子の集団励起について光子の LG モードに相当する軌道角運動量に関連付けられた空間自由度が存在し，原子集団と光子とがその自由度に関してエンタングルした状態を生成可能であることを確かめた．この結果は，空間自由度にエンコードされた qudits を用いた量子ネットワークのノードとして原子集団が利用可能であることを示唆するものであるが，測定基底が 2 次元に制限されていたために，qubit 間のエンタン

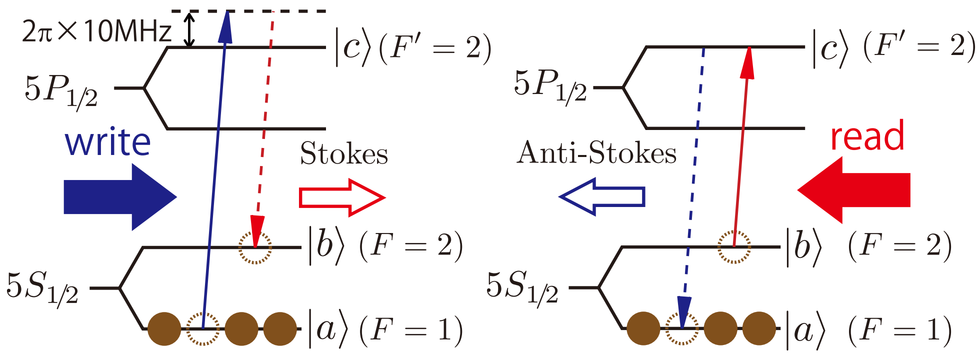

図 6.1　^{87}Rb のエネルギー準位とレーザーパルス，散乱光子の周波数．(a) は書き込み過程，(b) は読み出し過程．

グルメントを確認するにとどまっていた．本章では，同様の手法で生成した原子集団-光子間のエンタングルメントについて，2 つの部分系のそれぞれを 3 次元の量子系 (qutrit) とみなし，原子集団-光子間の軌道角運動量に関するエンタングルド状態のシュミットナンバー [87] が 3 より大きいことを検証した実験研究について報告する．なお，ある密度行列のシュミットナンバーが 3 であることは，その密度行列がシュミットランク 2 以下の純粋状態の混合では表現できないことを意味する．すなわち，エンタングルメントの多次元性の直接的な証拠である．

6.1　モデル

図 6.1 に示すような，$|a\rangle$, $|b\rangle$, $|c\rangle$ の 3 準位の構造を持った原子の集団を考える．原子集団を構成するすべての原子は予め準位 $|a\rangle$ にオプティカルポンピングされているものとする．この原子集団に $|a\rangle \rightarrow |c\rangle$ 遷移に近共鳴の光 (write pulse) を照射すると，$|c\rangle \rightarrow |b\rangle$ の遷移が誘起され，Stokes 光が発生する．Write pulse が十分弱く，また相互作用時間も十分短いとすると，1 つのパルスによって励起される Stokes 光子の数は高々 1 つとみなすことができる．

Stokes 光子が励起されると同時に，原子集団は集団的に励起される．この集団励起は，write pulse と Stokes 光子との位相差の空間分布を反映しており，次のように記述できる．

$$
\begin{aligned}
&\hat{S}^{\dagger}\,|a_1\rangle\,|a_2\rangle\cdots|a_N\rangle \qquad (6.1.1)\\
&=\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{j=1}^{N} e^{i\delta(\mathbf{r}_j)}\,|a_1\rangle\,|a_2\rangle\cdots|a_{j-1}\rangle\,|b_j\rangle\,|a_{j-1}\rangle\cdots|a_N\rangle\,.
\end{aligned}
$$

ここで，j は原子それぞれにつけられたラベルである．原子を集団的に励起する演算子 $\hat{S}^{\dagger}$ は，原子数 N を十分に大きくとればボソンの交換関係を満たす．原子集団の励起状態

(6.1.1) において，位相差の空間分布 $\delta(\mathbf{r}_j)$ は状態 $|a\rangle$ と状態 $|b\rangle$ との相対位相の空間的な分布に相当し，擬スピンの向きに特定の構造が与えられたものと解釈できる．

Stokes 光子の空間モードは，write pulse と原子集団とが重なり合った領域の形状に依存し，一般には write pulse の空間モードと同じでない．光の軌道角運動量はその空間モードによって特徴付けられるが，write pulse の軌道角運動量 L_{write}，散乱された Stokes 光子の軌道角運動量 L_{photon}，集団励起の軌道角運動量 L_{atoms} に関して，角運動量保存則から次のような関係が期待される．

$$L_{\mathrm{write}} = L_{\mathrm{photon}} + L_{\mathrm{atoms}}. \tag{6.1.2}$$

原子集団の軌道角運動量は，式 (6.1.1) 中の $\delta(\mathbf{r}_j)$ によって特徴付けられる．

書き込み過程において，write pulse として軌道角運動量を持たないガウシアンビームを照射した場合，式 (6.1.2) から，原子集団と Stokes 光子の複合系の状態 $|\Phi\rangle$ は以下のような確率的に生成されたエンタングルド状態 (2.3) として記述できる．

$$\begin{aligned} |\Phi\rangle \propto\ & |\mathrm{vac_p}\rangle\, |i_{\mathrm{atoms}}\rangle \\ & + \sqrt{p} \sum_{m=-\infty}^{\infty} C'_m\, |-m_{\mathrm{p}}\rangle\, |m_{\mathrm{atoms}}\rangle + \mathrm{O}(p), \end{aligned} \tag{6.1.3}$$

ここで，C'_m は各軌道角運動量状態の規格化された相対振幅である．$|\mathrm{vac}_p\rangle$ は Stokes 光子のモードの真空状態，$|i_{\mathrm{atoms}}\rangle \equiv |a_1\rangle\,|a_2\rangle \cdots |a_N\rangle$ は原子集団を構成するすべての原子が準位 $|a\rangle$ にある初期状態である．$\left|m_{\mathrm{p(atoms)}}\right\rangle$ は軌道角運動量 $m\hbar$ を持った単一 Stokes 光子 (集団励起) の状態を意味している．励起確率 p が十分低い場合に励起があったときのみ測定を行うことを仮定すると，第 2 項の単一励起部分以外を無視することができる．特に，実験では軌道角運動量が $\{-\hbar,\ 0,\ +\hbar\}$ の状態 $\{|L(l)\rangle,\ |G(g)\rangle,\ |R(r)\rangle\}$ で張られる光子 (集団励起) の状態にのみ感度を持った測定を行うので，次の状態が期待される．

$$|\phi\rangle = C_L\,|L\rangle\,|r\rangle + C_G\,|G\rangle\,|g\rangle + C_R\,|R\rangle\,|l\rangle\,. \tag{6.1.4}$$

これは，シュミットランク 3 のエンタングルド状態である．

原子集団の励起状態は，対応する空間モードの単一光子が電磁誘起透明化を基にした量子メモリ [28] の機構で保存された状態に相当する．すなわち，$|s\rangle \to |e\rangle$ の遷移に近共鳴のレーザーパルス (read pulse) を照射することで，集団励起の状態を反映した光子を理想的には確率 1 で読み出すことができる [付録 C]．この光子 (anti-Stokes 光子) に対して測定を行うことで原子集団の状態を間接的に測定できる．

6.2　実験

原子集団としては，レーザー冷却された OD ~ 5 の ^{87}Rb (MOT) を用いた．図 6.2(a) に示すように，原子をロードするための時間（ロード時間: 6 ms）と測定を行うための時間（測定時間: 4 ms）に分けられる．ロード時間においては Cooling 光, Repumping 光, 四重極磁場を用いて磁気光学トラップを行うが，測定時間に移行する前に $5S_{1/2}F=2 \to 5P_{3/2}F=2$ に共鳴の depumping 光を 50 μs 照射することで原子を $5S_{1/2}F=1$ へポンピングした．原子集団がガラスセル中にある我々の実験装置においては，周囲の金属部品を排除することで誘導電流の影響を減らすことが可能で，磁場の減衰の時定数は 44μs であった．測定時間においては，400 ns 周期で write pulse，read pulse を MOT に照射した．write pulse は時間幅 15 ns のガウシアンパルスで，それから 40 ns 遅れて照射される read pulse は時間幅 200 ns の矩形パルスとした．Write pulse に含まれる平均光子数は 4×10^4 個程度であり，read pulse の強度は 300 μW とした．Write pulse は $5S_{1/2}F=1 \to 5P_{1/2}F'=2$ の遷移周波数から $\Delta = 2\pi\cdot 10$ MHz の離調を取って周波数ロックした．MOT の中心でのビームウェストは 400 μm であり，この点で焦点を結ぶように調整した．また，read pulse は $5S_{1/2}F=2 \to 5P_{1/2}F'=2$ の遷移周波数に周波数ロックされており，write pulse に対向し，空間モードを共有するように調整した．Write pulse, read pulse はそれぞれ外部共振器つき半導体レーザー，チタンサファイヤレーザーで準備され，おのおのの空間モードを単一モードファイバー (SMF)1,2 でガウシアンモードに整えた．また，両者の偏光は，原子集団に固定された量子化軸に対して，ともに同じ円偏光 σ^+ とした．

Write pulse によって Stokes 光は相互作用領域の長軸方向にある程度大きな立体角にわたって散乱される．Stokes 光を見込む空間モードは，SMF3 と空間光変調器 SLM1 で決められる．Stokes 光子を検出する光軸は，Write-Read の光軸から 3° の角度差がつけられており，MOT の中心で 275 μm のビームウェストの焦点を結ぶように調整した．Anti-Stokes 光子を検出する空間モードは SMF4 と SLM2 で決定され，2 つの SLM において同様のモード変換を受けた場合には，空間モードを共有するように調整した．すなわち，Stokes 光子のそれと同様に Anti-Stokes 光子を見込む空間モードもまた，MOT の中心で 275 μm のビームウェストの焦点を結ぶ．また，Write pulse, read pulse と同じ円偏光の Stokes, anti-Stokes 光子が選択的に検出されるように偏光フィルターを調整した．

本研究で使用した SLM は，浜松ホトニクス製プログラマブル位相変調ユニット X8267 で，20 mm × 20 mm 中の 768 px × 768 px の各画素で，最大 2.2π の位相シフトを 256 階調で制御できる．所望の位相変調を受けた成分とそれ以外の成分とを分離するため，4 px を 1 周期としたブレーズ型のグレーティング構造を所望の空間位相変調 $T(x,y)$ に上乗

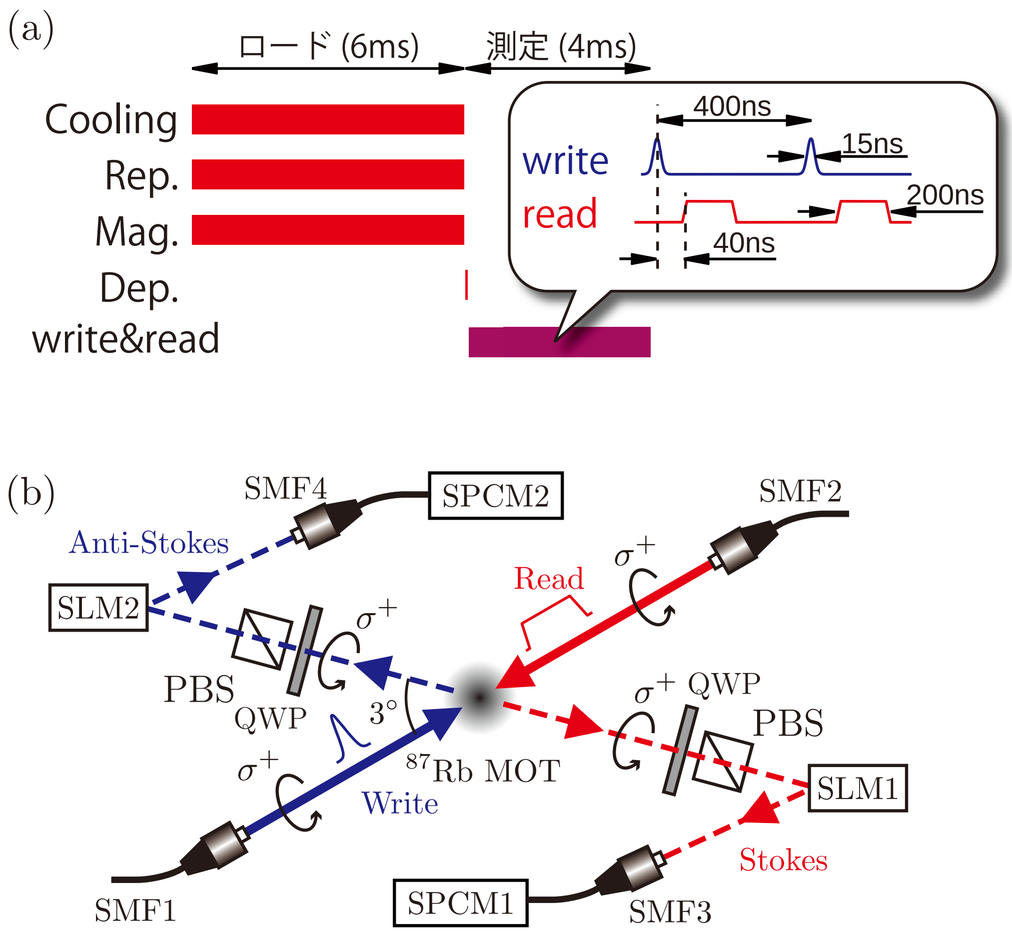

図 6.2 (a) 実験のタイムシーケンス．Rep., Repumping 光; Dep., Depumping 光; Mag., 四重極磁場．Depumping 光は Cooling 光，Repumping 光，磁場が遮断された後，50 μs 照射される．(b) 実験装置の模式図．SMF, 単一モードファイバー; PBS, 偏光ビームスプリッター; QWP, 1/4 波長板; SPCM, 単一光子検出器; SLM, 空間光位相変調器．

せして変調している．回折効率は $T(x,y)$ によらず，SLM1, SLM2 ともに 25% 程度である．SLM の諸特性については付録 D.4.3，D.4.4 に示した．本実験では，原子集団から散乱される様々な空間モードの Stokes, anti-Stokes 光子に対して SLM で適当な位相変調 $T(x,y)$ を加え，その位相変調によってガウシアンモードに変換された光子を SPCM で検出する．すなわち，光子対に対する様々な測定基底を SLM による位相変調パターンで用意できる [88]．

ガウシアンモードの Stokes 光子，anti-Stokes 光子に対する時間分解光子計数の結果を図 6.3 に示す．横軸は，Stokes 光子と anti-Stokes 光子とが検出される時間差にオフセットを加えたものである．光子計数の時間波形は，write pulse の時間波形 (ガウシアン) と，Stokes, anti-Stokes 光子のコヒーレンス時間を反映している [89]．相関計数の

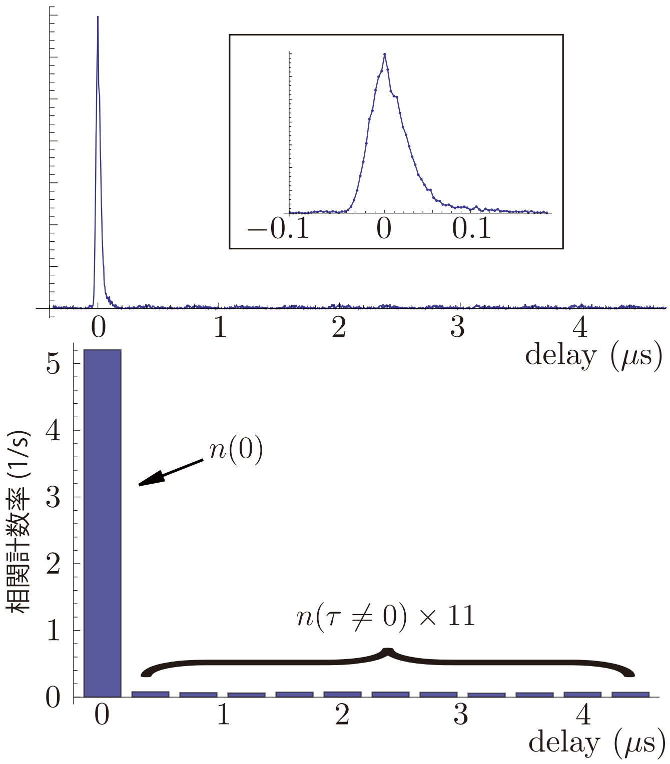

図 6.3　ガウシアンモードの Stokes 光子，Anti-Stokes 光子の時間分解光子計数．波形の時間幅は，Stokes 光子 (write pulse) の時間幅と Stokes 光，anti-Stokes 光のコヒーレンス時間によって制限され，read pulse の時間幅 200 ns より短い．

時間幅より長い read pulse は，集団励起の緩和やインコヒーレントな励起に対して，原子集団を構成するすべての原子が $5S_{1/2}F = 1$ にある初期状態を維持させる役割も果たす．計数率は 5.2 $s\ ^{1}$ であった．遅れ時間 0 ns 以外の，400 ns ごとにみられるピークは，式 (6.1.3) で無視できると主張した高次の励起や，SPCM のダークカウント，迷光の寄与によるものである．$n(0)$ にはこれらの無相関な光子計数 $n(\tau \neq 0)$ もオフセットとして含まれる．両者の比，すなわち Stokes, anti-Stokes 光子の 2 モード強度相関は $g^{(2)}_{\mathrm{s,as}} = n(0)/n(\tau \neq 0) = 74.6 \pm 7.4$ である．十分大きな $g^{(2)}_{\mathrm{s,as}}$ が得られていることは，第 5 章で議論されているように，式 (6.1.3) の高次の励起に関する項が十分無視できる状況で単一励起の原子集団-光子に対して測定を行っていることを意味する．

原子集団-光子の複合系の状態を明らかにするため，密度行列の最尤推定を行った．光子に対する測定基底は，式 (6.1.4) と同じ記法で，$\{|L\rangle, |G\rangle, |R\rangle, (|G\rangle + |L\rangle)/\sqrt{2}, (|G\rangle + |R\rangle)/\sqrt{2}, (|G\rangle + i|L\rangle)/\sqrt{2}, (|G\rangle \quad i|R\rangle)/\sqrt{2}, (|L\rangle + |R\rangle)/\sqrt{2}, (|L\rangle + i|R\rangle)/\sqrt{2}\}$，集団励起に対する測定基底は $\{|l\rangle, |g\rangle, |r\rangle, (|g\rangle + |l\rangle)/\sqrt{2}, (|g\rangle + |r\rangle)/\sqrt{2}, (|g\rangle \quad i|l\rangle)/\sqrt{2}, (|g\rangle + i|r\rangle)/\sqrt{2}, (|l\rangle + |r\rangle)/\sqrt{2}, (|l\rangle \quad i|r\rangle)/\sqrt{2}\}$ のそれぞれ 9 通りで，各測定基底の直積で構成される 81 通りの測定基底で相関計数を測定した．再構築された

密度行列を図 6.4 に示す．シュミットランク 3 の最大エンタングルド状態 $|\mathrm{MES}\rangle$ に対する再構築された密度行列のフィデリティー (エンタングルメントフィデリティー) は $F_{exp} \equiv \langle \mathrm{MES}|\hat{\rho}_{\mathrm{exp}}|\mathrm{MES}\rangle = 0.74 \pm 0.02$ であった．ここで，$|\mathrm{MES}\rangle$ としては，次の最大エンタングルド状態 $|\mathrm{MES}\rangle \equiv (e^{i\alpha\pi}|Lr\rangle + |Gg\rangle + e^{i\beta\pi}|Rl\rangle)/\sqrt{3}$ の中で再構築された密度行列に対するフィデリティーが最大となる $\alpha = 0.019$, $\beta = -0.058$ を選んだ．また，誤差は，光子計数値がポアソン分布に従うものとして，モンテカルロシミュレーションにより求められた標準偏差である．$C^3 \otimes C^3$ に属する密度行列 $\hat{\rho}$ に対するシュミットナンバー 3 のウィットネス演算子は $\hat{W}_3 = 1 - 3|\mathrm{MES}\rangle\langle\mathrm{MES}|/2$ で与えられ [付録 F]，$\mathrm{Tr}(\hat{W}_3\hat{\rho}) < 0 \Leftrightarrow \langle\mathrm{MES}|\hat{\rho}|\mathrm{MES}\rangle > 2/3$ が成り立つ．すなわち，$F_{exp} = 0.74 \pm 0.02 > 2/3$ は，再構築された密度行列のシュミットナンバーが 3 であり，軌道角運動量に関する原子集団-光子間エンタングルメントが 2 者間 2 次元のエンタングルメントでは記述できない，2 つの qutrit がエンタングルした状態であることを意味する．

6.3　考察と展望

本実験では，SLM によるモード変換と単一モードファイバーとを組み合わせて軌道角運動量に敏感な測定を実現している．付録 D で論じられているように，光子の軌道角運動量状態に対応する LG モードは動径方向の指数 p, 軌道角運動量に直接関わる回転方向の指数 m によって特徴付けられるが，SLM で実現されるモード変換の前後では，m だけでなく p も変化する．この影響を，光子計数値に対する 20% の誤差として取り入れ，それを含めてエンタングルメントフィデリティーを評価すると $F'_{exp} \equiv \langle\mathrm{MES}|\hat{\rho}_{\mathrm{exp}}|\mathrm{MES}\rangle = 0.74^{+0.06}_{-0.07}$ であった．この誤差もモンテカルロシミュレーションにより求められた標準偏差であるが，下限においても閾値 2/3 を上回る．

軌道角運動量 0, $\pm\hbar$ 成分の相対振幅の差はエンタングルメントフィデリティーに影響する．再構築された密度行列では，$(\langle Lr|\rho|Lr\rangle, \langle Gg|\rho|Gg\rangle, \langle Rl|\rho|Rl\rangle) = (0.254, 0.367, 0.262)$ であった．この差は原子集団と write pulse の相互作用領域の形状に依存し [90]，この領域は原子集団の大きさ，write pulse のビームウェスト，write pulse と Stokes 光子の間に設けられた角度差といったパラメーターで調整が可能である．ただし，再構築された密度行列 $\hat{\rho}$ に最も近い純粋状態についてエンタングルメントフィデリティーを評価すると 0.96 であり，これは 0.74 より十分大きいため，この相対振幅の差はエンタングルメントフィデリティーを低下させる支配的な要因とは言い難い．また，この相対振幅を $1:1:1$ にするような局所フィルターを光子側に仮想的に施した場合のエンタングルメントフィデリティーも 0.74 であった．

一方で，再構築された密度行列 $\hat{\rho}$ の純粋度 $\mathrm{Tr}\left(\rho^2\right)$ は 0.69 にとどまっており，純粋度の低さがエンタングルメントフィデリティーに悪影響を及ぼしていると推測される．密度

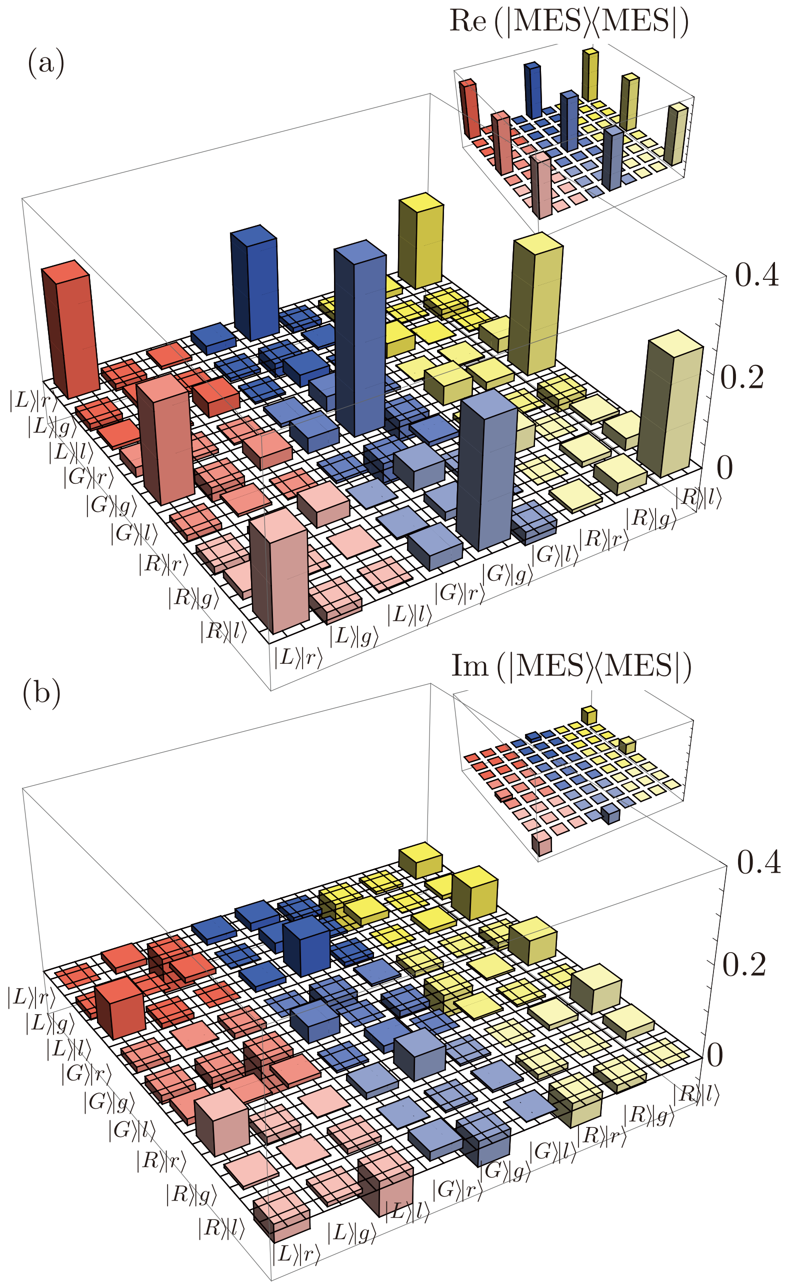

図 6.4　再構築された密度行列の実部 (a) と虚部 (b)．(a) には 9 本の特徴的なピークが見られ，特に非対角項の 6 つはエンタングルした状態に特有のものである．それぞれに，最大エンタングルド状態のひとつである $|\mathrm{MES}\rangle \equiv (e^{i0.019\pi}|Lr\rangle + |Gg\rangle + e^{-i0.058\pi}|Rl\rangle)/\sqrt{3}$ の密度行列の実部の虚部を付記した．

行列の純粋度を低下させる要因は，原子集団におけるデコヒーレンスと迷光の寄与である．本実験の測定時間中における残留磁場は 1 mG 程度であり，この磁場による下準位のラーモア歳差運動の周期は 1 ms のオーダーである．原子の運動については第 4 章で議論したように 100 μs 程度で影響を及ぼすだろうと考えられる．これらはどちらも集団励起が保持される時間である 40 ns より十分に長く，デコヒーレンスによる純粋度の低下は無視できると期待される．したがって，密度行列の純粋度を低下させた主要因は迷光の影響であると予想される[*1].

以上から，本実験では原子集団と光子の間に生成した軌道角運動量に関するエンタングルド状態のシュミットナンバーが 2 より大きいことが確認された．この結果は，qudit による量子情報処理のリソースとして原子集団が利用可能であることと同時に，物質と光の間で空間自由度にエンコードされた多次元の量子情報を自由にやりとりできることを直接示している．

[*1] この結論は一見すると第 5 章での「ダークカウントレートが十分に低い」という結果と矛盾するように思えるかもしれない．しかし，本実験では相関が最大でない，すなわち光子のフラックスが少なくなるような測定基底の組み合わせでも光子計数を行う必要があるため，常に最大の相関が得られる組み合わせで光子検出を行っていた第 5 章の実験よりも迷光の影響を受けやすい．したがって，矛盾があるわけではない．

第 7 章

結論

レーザー冷却された希薄な（量子縮退していない）原子集団と光との集団相互作用を用いて，原子集団と光子との軌道角運動量に関するエンタングルド状態を生成・評価することが本研究のねらいであった．

希薄な原子集団は，長いコヒーレンス時間を維持しながら光との相互作用を増強できることが期待される，優秀な量子情報の担体である．また，軌道角運動量状態は，これまでよく研究されてきた 2 次元の量子系と比較して，通信路容量の向上やより安全な量子暗号プロトコルの実現が見込まれている多次元の量子系を構成し得る有力な候補である．

本研究を開始する以前は，原子集団-光子間のエンタングルメントとしてはスピン-偏光自由度に関するそれだけが報告されていた．また，理論的な取り扱いでは原子集団を構成する個々の原子の位置の交換に対して対称な状態を用いて議論されるにとどまっていた．総じて，空間自由度を積極的に取り入れた評価がなされた例は無かったと言える．しかしながら，原子集団に励起された集団的スピンのコヒーレンス時間は原子集団に刻まれていると推察される位相構造の周期を考慮したものと良い一致を見せており，これを解釈するためのモデルに空間自由度を導入する必要性があると考えた．モデルに空間自由度を導入することから，光子の軌道角運動量状態に相当し光子との間で軌道角運動量の可逆なやり取りを可能にするような，空間的な位相構造によって特徴付けられた新奇な原子集団の状態を扱えることが期待され，原子集団と光子との軌道角運動量エンタングルメントを評価することを通じてその実証を行おうと試みた．

本研究では，実用的な多次元量子情報処理システムの構築に向けた基礎技術の開発として，以下の成果を得ることができた．

1. 軌道角運動量に関する原子集団-光子間 2 次元エンタングルド状態の生成
2. 軌道角運動量に関する原子集団-光子間 3 次元エンタングルド状態の生成

また，上述のテーマから派生し，原子集団との親和性に優れた量子的な光源の開発に向

けて，

3. 原子集団を用いた条件付単一光子数状態の生成

の研究も併せて行った．

以下では各成果についてまとめ，最後に今後の展望に言及して本論文の結びとする．

軌道角運動量に関する原子集団-光子間 2 次元エンタングルド状態の生成

エンタングルメントの定量評価という観点では，2 者間 2 次元のエンタングルメントに対しては容易に与えられる指標が存在する一方で，2 者間 3 次元以上の多次元系については少なくとも実験に利用可能な範囲では適切な指標が存在しない．そこで，最初のステップとして，軌道角運動量に関してエンタングルした各部分系の自由度を 2 次元に制限して定量的な評価を行うことにした．

測定された原子集団-光子の複合系の状態において，最大エンタングルド状態に対するフィデリティー F の観点からは $F > 0.70 \pm 0.08 > 1/2$ が，EoF の観点からは $\mathrm{EoF} = 0.76 \pm 0.17 > 0$ がそれぞれ得られ，ともにエンタングルメントが存在するための閾値を超えていた．この結果から，質量を持つ粒子と光子との間で軌道角運動量に関するエンタングルメントが初めて確認された．

また，ここで得られた結果は，原子集団と光の集団相互作用に寄与する原子数が，原子集団に刻まれる空間的位相構造の周期によって制限されるものではないことの証拠である．このような場合，励起状態は原子の位置の交換に対して対称ではなくなるが，それでもなお原子が集団的に寄与することが明らかになった．この結果を解釈し得る，空間自由度を取り入れたモデルを本論文の第 2 章に示した．なお，近年になってから，この過程で生成される光子対の空間自由度に関する理論研究 [90] も報告された．

軌道角運動量に関する原子集団-光子間 3 次元エンタングルド状態の生成

軌道角運動量状態を量子情報処理に取り入れる利点は，その多次元性を有効に利用した発展的な応用の可能性にある．したがって，エンタングルメントの多次元性を定量的に評価することが必要であろうと考えた．また，軌道角運動量とスピン角運動量とが近似的にしか分離できないことを考慮すると，軌道角運動量に特有の領域である 3 次元エンタングルメントを評価することは，軌道角運動量に関するエンタングルド状態の存在に対するより明確な証拠の提示となるだろうと考えた．

測定基底を 3 次元に拡張した上で評価を行った結果，被測定状態とシュミットランク 3 の最大エンタングルド状態とのフィデリティー F について $F = 0.74^{+0.06}_{-0.07} > 2/3$ を得

た．この結果は，集団相互作用を用いて生成された原子集団と光子とのエンタングルド状態が，軌道角運動量状態に特有のシュミットナンバー 3 の領域にあることを示している．

原子集団を用いた条件付単一光子数状態の生成

原子集団と光の集団相互作用を利用することで，高い同時性を持つ集団的スピン-光子の対を生成できる．十分低い励起確率のもとでは，光子の検出によって条件付けられた集団的スピンは極めて単一励起に近くなる．このような集団的スピン状態を量子メモリの再生過程に相当する操作を通じてコヒーレントに光子の状態に転写することが可能であり，この手法によって条件付単一光子数状態を生成することができる．

このような同時性，あるいは単一光子性を持った光源としては，パラメトリック下方変換を利用したものがよく知られている．しかし，パラメトリック下方変換で生成される光子対は原子の自然幅と比較して広い周波数幅を持ち，この特徴は原子-光子間で情報のやりとりを行う上で大きな問題となる．一方で，原子集団と光の集団相互作用によって生成された光子の線幅は用いるレーザーパルスの線幅と同程度であり，原子集団と光子とを相補的に利用した新しい量子情報処理系を実験的に研究するにあたっての有用な道具となることが期待された．単一光子数状態の特徴はその強度相関に強く顕れる．条件付単一光子数状態の単一光子性を特徴付ける量としてはこの強度相関に対応した反相関パラメターがよく知られており，エンタングルメントの評価にあたって生成された狭線幅の光子対に対して反相関パラメターを評価した．

得られた最小の反相関パラメターは 0.017 ± 0.009 であった．比較的単純な構成の実験系を用いながらも，これまでに世界中で行われている同様の実験と比較して最高の，優れた単一光子性が確認された．

今後の展望

軌道角運動量に関するエンタングルメントが多次元量子情報処理のための有用な資源であることは既に述べた通りである．量子ネットワークの構築を目指す研究としての観点からは，電磁誘起透明化を基にした量子メモリを用いることで，本研究で得られた原子集団-光子間エンタングルメントを原子集団-原子集団間のそれへと拡張することが次のステップだろう．この方向で研究を進める上では，現在は基礎研究から応用研究への過渡期にあたると考えている．

本研究で得られたエンタングルメントを利用することで，光子に対する測定を介して原子集団の持つ軌道角運動量を $\hbar$ 単位で自由に制御することが可能となると期待される．原子集団を凝縮体に置き換える，あるいはブラッグ散乱 [91] を用いることで，凝縮系の軌道

角運動量を $\hbar$ 単位で制御することも実現できる．また，本研究で培われた光の軌道角運動量を光子レベルで評価し得る測定技術は，凝縮体中の双極子-双極子相互作用によって発現することが予測されているスピン・軌道角運動量が絡んだ新しい量子相の探索 [92,93] においても有用な道具となるだろう．

以上のように，本研究の成果は量子情報処理にとどまらず，物性研究にも貢献するものである．

付録 A

光の軌道角運動量状態

光はエネルギー，運動量，角運動量を伝搬する．光の持つ角運動量のうち，偏光に起源を持つものはスピン角運動量と呼ばれ，偏光以外に起源を持つものは軌道角運動量と呼ばれる [94].

一般の電磁場では角運動量をスピン部分，軌道部分に切り分けて論じることは困難であるが，角運動量そのものではなく角運動量束に基づいて議論すれば良いことが分かっている [95]．また，近軸近似のもとで取り扱えるビームについては，角運動量に基づく議論であってもそのスピン部分と軌道部分を分けて議論できる．本論文で扱うのは近軸近似が十分に正しい領域であり，本章では，この領域での軌道角運動量状態を概観する．

A.1　ラゲールガウシアンビーム

マクスウェル方程式から得られる電場 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t)$ に関する波動方程式は,

$$\nabla^2 \boldsymbol{E} - \frac{n^2}{c^2}\frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2} = 0 \tag{A.1.1}$$

と表される．$\boldsymbol{r}$ は 3 次元空間のベクトルであり，n は光が伝播する媒質の屈折率，c は真空中の光速である．電場 E が位置と時間について変数分離できるなら，$E(\boldsymbol{r}, t) = R(\boldsymbol{r})T(t)$ として式 (A.1.1) に代入して整理すると次式を得る:

$$\frac{\nabla^2 R}{R} = \frac{n^2}{c^2}\frac{\frac{\mathrm{d}^2 T}{\mathrm{d}t^2}}{T}. \tag{A.1.2}$$

左辺は $\boldsymbol{r}$ の関数，右辺は t の関数で，両者が等しいためには定数である必要があるので，これを $-k^2$ とおけば,

$$\left(\nabla^2 + k^2\right) R = 0 \tag{A.1.3}$$

$$\left(\frac{\mathrm{d}^2 T}{\mathrm{d}t^2} + \frac{c^2 k^2}{n^2}\right) T \equiv \left(\frac{\mathrm{d}^2 T}{\mathrm{d}t^2} + \omega^2\right) T = 0 \tag{A.1.4}$$

と書ける．$\omega \equiv ck/n$ で定義した．式 (A.1.3) はヘルムホルツ方程式と呼ばれる．式 (A.1.4) の一般解は

$$T(t) = T_1 e^{i\omega t} + T_2 e^{-i\omega t} \tag{A.1.5}$$

で与えられる．すなわち，ω は角周波数に相当し，$k = \dfrac{n\omega}{c} = \dfrac{2\pi}{\lambda}$ は波数と呼ばれる．なお，λ は波長である．

z 軸正の向きに伝播し，振幅が時間的に一定で角周波数が ω であるような電場は，包絡線関数 $u(\boldsymbol{r})$ を用いた複素表示

$$E(\boldsymbol{r}) = u(\boldsymbol{r}) e^{-i(\omega t - kz)} \tag{A.1.6}$$

で記述できる．空間部分は $R(\boldsymbol{r}) \equiv u e^{ikz}$ と書けるので，これをヘルムホルツ方程式 (A.1.3) に代入すれば，

$$\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}x^2} + \frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}y^2} + \frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}z^2} + 2ik\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}z} = 0 \tag{A.1.7}$$

を得る．今，包絡線関数 $u(\boldsymbol{r})$ の z 軸方向に対する変化が十分小さい状況を考える．すなわち，

$$\left|\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}z^2}\right| \ll k \left|\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}z}\right| \tag{A.1.8}$$

を仮定[*1]し，

$$\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}x^2} + \frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}y^2} + 2ik\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}z} = 0 \tag{A.1.9}$$

を得る．この近似は近軸近似と呼ばれる．この方程式の解 $\mathrm{LG}_{\mathrm{pm}}$ はパラメータ p，m を

[*1] 波数ベクトルと光軸の成す角が十分小さければ仮定は良い近似で満たされる．例えば，非常に細く絞られた光ビームにこの近似を適用することは適切でない．

用いて，円筒座標系 $(r=\sqrt{x^2+y^2}, \theta=\arctan(y/x), z)$ のもとで次のように書ける．

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{LG_{pm}}(r,\theta,z)=\sqrt{\frac{2p!}{\pi(p+|m|)!}}\rho^{|m|}\mathrm{L}_p^{|m|}\left(\rho^2\right)\frac{1}{w}\exp\left[-r^2\left(\frac{1}{w^2}-\frac{\mathrm{ik}}{2R}\right)+\mathrm{i}m\theta-\mathrm{i}\Phi_p^m\right],\\
&\text{where } \rho=\frac{\sqrt{2}r}{w}\\
&\qquad w(z)=w_0\sqrt{1+\left(\frac{z-z_0}{z_R}\right)^2}\\
&\qquad R(z)=(z-z_0)\left\{1+\left(\frac{z_R}{z-z_0}\right)^2\right\}\\
&\qquad \Phi_m(z)=(2p+|m|+1)\tan^{-1}\left(\frac{z-z_0}{z_R}\right)\\
&\qquad z_R=\frac{kw_0^2}{2}\\
&\qquad \mathrm{L}_p^{|m|}(x)=\frac{e^x x^{-|m|}}{p!}\frac{\mathrm{d}^p}{\mathrm{d}x^p}\left(e^{-x}x^{p+|m|}\right)=\sum_{s=0}^{p}{}_{p+|m|}C_{p-s}\frac{(-x)^s}{s!}
\end{aligned}
\tag{A.1.10}
$$

ここで，z_0 はくびれの位置であり，w_0 は z_0 におけるビームウェストである．

近軸近似の範囲において，$\mathrm{LG_{pm}}$ は直交性と完全性を満たすヘルムホルツ方程式の固有関数である．したがって，ヘルムホルツ方程式の任意の解 $u(\boldsymbol{r})$ を $\mathrm{LG_{pm}}$ の重ね合わせで記述できる．すなわち，

$$
u(\boldsymbol{r})=\sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{p=0}^{\infty}C_p^m\mathrm{LG_{pm}}(\boldsymbol{r}) \tag{A.1.11}
$$

によって，自由空間中を安定に伝播する任意の光ビームの空間モードを表現できる．固有関数 $\mathrm{LG_{pm}}$ に対応する光ビームの空間モードをラゲールガウシアン (LG; Laguerre-Gaussian) モードと呼び，その光ビームを LG ビームと呼ぶ．

いくつかの LG ビームについて，その強度分布と位相分布を図 A.1∼A.6 に示す．パラメータ p は動径方向の次数であり，p + 1 は動径方向における節 (暗点) の数を意味している．また，パラメータ m は角度方向の次数であり，光軸まわりの閉経路上における位相勾配の積分値 (2mπ) を定める．m $\neq$ 0 のとき，このような積分値を与える点を位相特異点と呼ぶ．

A.2　単一光子の角運動量状態

古典的な光の空間モードに 2 つのパラメータ p(0 以上の整数)，m(整数) で指定される自由度があることがわかった．これに加えて，偏光 $\sigma^{\pm}=\pm1$，伝播軸 (z 軸) 方向の運動量成分に対応する波数の大きさ k_0(正の実数) もまたそれぞれ直交性と完全性を満たす基

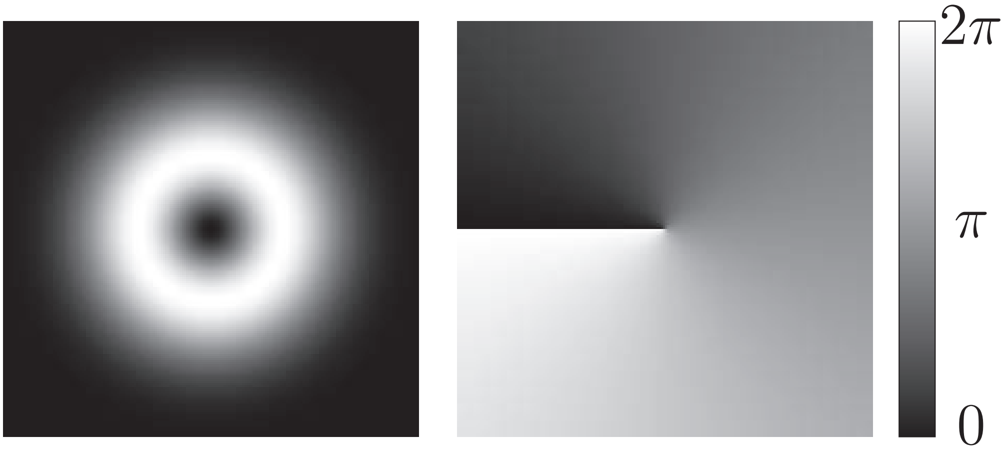

図 A.1　$\mathrm{LG}_{0,-1}$ の強度分布 (左) と位相分布 (右)．ビームの進行方向は紙面方向上向きである．

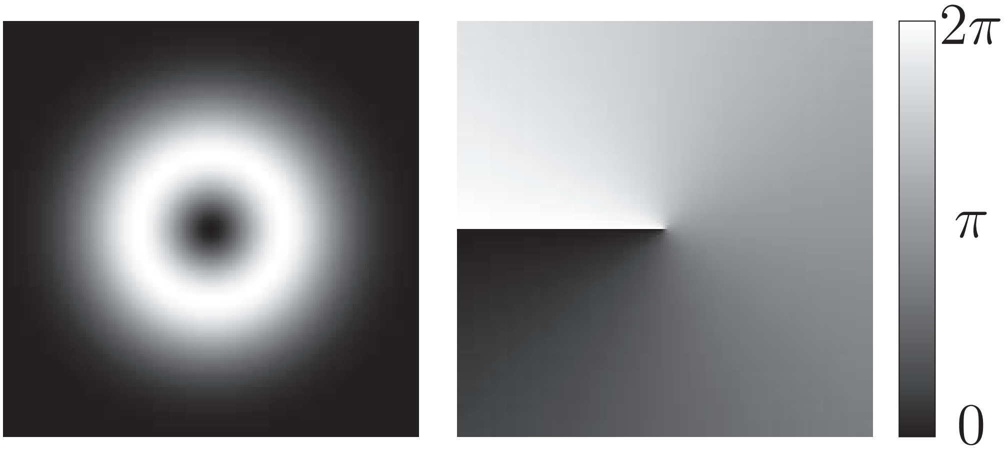

図 A.2　LG_{01} の強度分布 (左) と位相分布 (右)．ビームの進行方向は紙面方向上向きである．

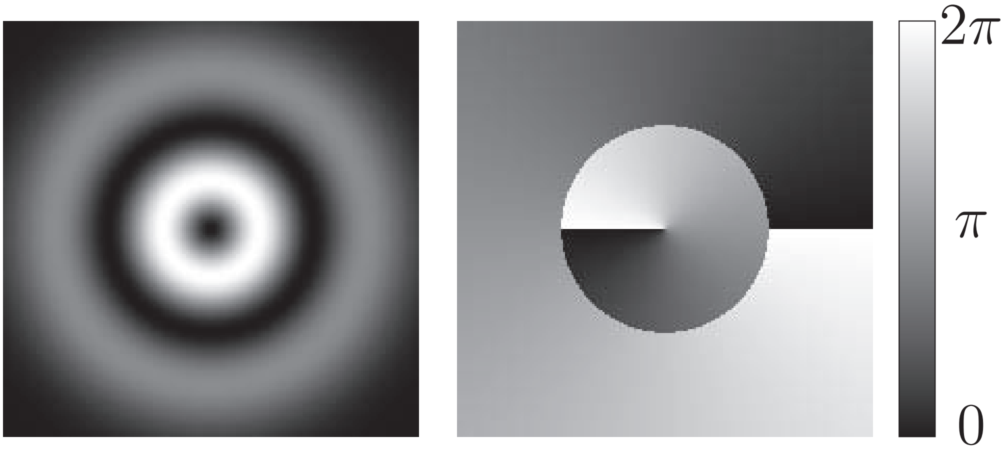

図 A.3　LG_{11} の強度分布 (左) と位相分布 (右)．ビームの進行方向は紙面方向上向きである．

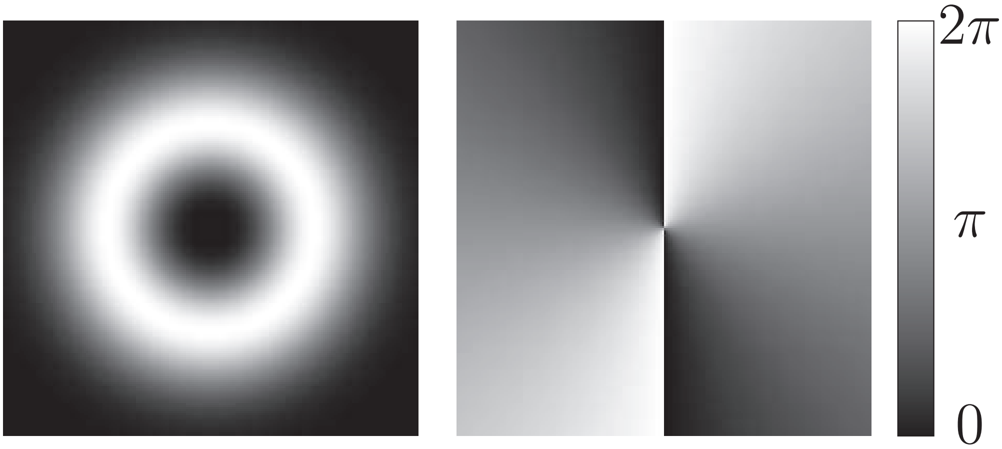

図 A.4　LG_{02} の強度分布 (左) と位相分布 (右).ビームの進行方向は紙面方向上向きである.

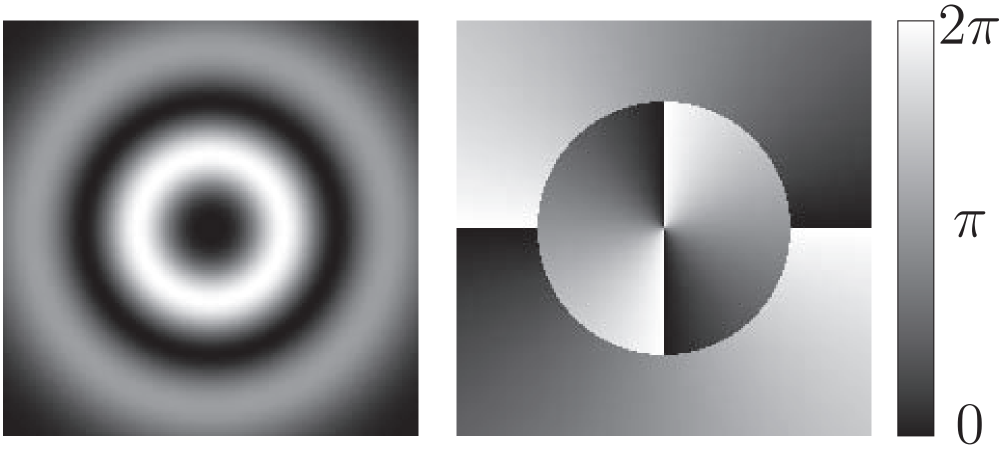

図 A.5　LG_{12} の強度分布 (左) と位相分布 (右).ビームの進行方向は紙面方向上向きである.

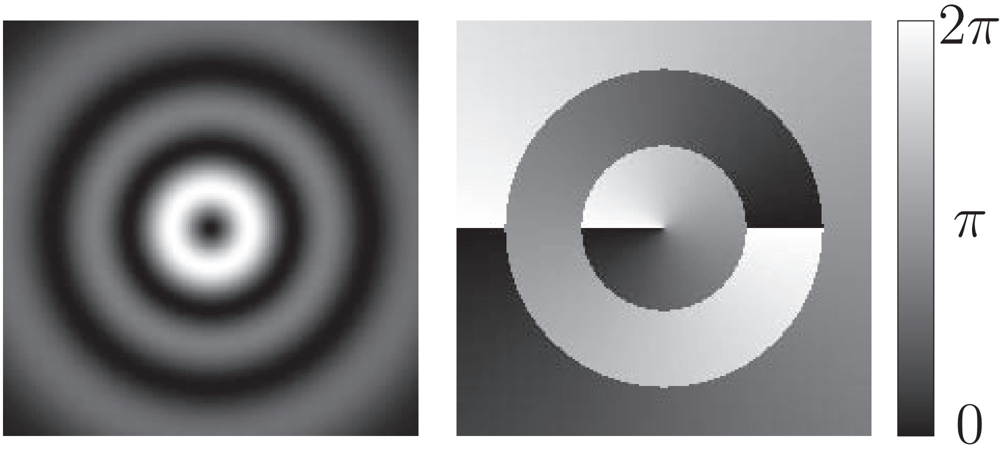

図 A.6　LG_{21} の強度分布 (左) と位相分布 (右).ビームの進行方向は紙面方向上向きである.

底で展開できる．単一光子数状態 $|1\rangle$ はこれらのパラメータで展開されて [45],

$$|1\rangle = \sum_{\sigma,p,m} \int_0^\infty \mathrm{d}k_0 \; C_{\sigma,p,m}(k_0)\hat{a}^\dagger_{\sigma,p,m}(k_0)\,|\mathrm{vac}\rangle \tag{A.2.1}$$

と書ける．$\hat{a}_{\sigma,p,m}(k_0)$ は添え字のパラメータに対応する光子の消滅演算子で，交換関係 $\left[\hat{a}_{\sigma,p,m}(k_0), \hat{a}^\dagger_{\sigma,p,m}(k'_0)\right] = \delta_{\sigma\sigma'}\delta_{pp'}\delta_{mm'}\delta(k_0 - k'_0)$ を満たす．この演算子は，運動量 $\boldsymbol{k} = \boldsymbol{q} + \boldsymbol{k}_0$*2，偏光 σ の光子の消滅演算子 $\hat{a}_\sigma(\boldsymbol{q}, k_0)$ を用いて

$$\hat{a}_{\sigma,p,m} = \int \mathrm{d}^2\boldsymbol{q}\mathcal{LG}_{\mathrm{pm}}(\boldsymbol{q})\hat{a}_\sigma(\boldsymbol{q}, k_0) \tag{A.2.2}$$

と書ける．ただし，$\mathcal{LG}_{\mathrm{pm}}(\boldsymbol{q})$ は $\mathrm{LG}_{\mathrm{pm}}(r,\theta,z=0)$(A.1.10) を z 軸に垂直な平面内でフーリエ変換した関数であり，具体的には次の形で与えられる．

$$\mathcal{LG}_{\mathrm{pm}}(k_r, k_\theta) = \sqrt{\frac{w_0^2 p!}{2\pi(p+|m|)!}}k_\rho^{|m|}\mathrm{L}_p^{|m|}\left(k_\rho^2\right)\exp\!\left(-\frac{k_\rho^2}{2}\right)\exp\!\left[imk_\theta - i\frac{\pi}{2}(2p+|m|)\right],$$

ここで，複素数 $C_{\sigma,p,m}$ は規格化されており，$k_\rho \equiv w_0 k_r/\sqrt{2}$ で定義される．

z 軸方向の軌道角運動量演算子，スピン角運動量演算子は，それぞれ

$$\hat{L}_z = \hbar \sum_{\sigma,p,m} m \int_0^\infty \mathrm{d}k_0 \hat{a}^\dagger_{\sigma,p,m}(k_0)\hat{a}_{\sigma,p,m}(k_0),$$
$$\hat{S}_z = \hbar \sum_{\sigma,p,m} \sigma \int_0^\infty \mathrm{d}k_0 \hat{a}^\dagger_{\sigma,p,m}(k_0)\hat{a}_{\sigma,p,m}(k_0),$$

で与えられる [45]．式 (A.2.1) の基底ベクトル $|\sigma,p,m,k_0\rangle \equiv \hat{a}^\dagger_{\sigma,p,m}(k_0)\,|\mathrm{vac}\rangle$ はこれらの演算子の固有ベクトルになっていて，

$$\hat{L}_z\,|\sigma,p,m,k_0\rangle = m\hbar\,|\sigma,p,m,k_0\rangle\,,$$
$$\hat{S}_z\,|\sigma,p,m,k_0\rangle = \sigma\hbar\,|\sigma,p,m,k_0\rangle\,,$$

をそれぞれ満たす．固有値 $m\hbar$，$\sigma\hbar$ は光子 1 個の軌道角運動量，スピン角運動量である*3.

*2 $\boldsymbol{q}$ は光軸に垂直な平面内の波数ベクトル．

*3 [45] の議論でも，近軸近似が用いられている．角運動量が軌道角運動量とスピン角運動量に分離されているのはそのためである．

付録 B

相関関数

光ビームの量子論的な描像においては，光子数の確率分布，より一般には密度演算子が主要な役割を果たす．光子数状態を表現基底に選んだ密度演算子の対角成分である光子数確率分布は，光子計数実験によって得られる強度相関関数に大きな影響を及ぼすため，光ビームの量子論的側面を対象とした実験研究においては，光子計数および強度相関の測定が便利な道具としてよく用いられる．

B.1　強度相関関数

光の強度相関を測定した最初の実験は，1956 年，Hanbury Brown と Twiss によって行われた．これ以前に行われていた Young の干渉などの実験は電場振幅の一次の相関を測定するものであったのに対し，この実験では二次，すなわち強度の相関を測定し，強度の揺らぎに関する情報を得られる．光の理論の際立った特徴としては，古典論と量子論の取り扱いに根本的な差異があるにも関わらず，両者の予測がよく一致することが挙げられる．しかし，古典電磁気学では考えられない種類の光に関しては，量子論的な効果が表れる．本節では，古典論，量子論での強度相関の性質を説明する．

B.1.1　古典論による強度相関関数

強度相関の測定は，被測定光をビームスプリッターで等分して 2 つの検出器で受け，検出信号の相関を見ることによって行われる (図 B.1).

Hanbury Brown と Twiss による最初の実験では，2 つの検出器に由来する光電流に遅延をつけてアナログ的に掛け算することによって $I(t)I(t+\tau)$ の時間平均を測定する．時

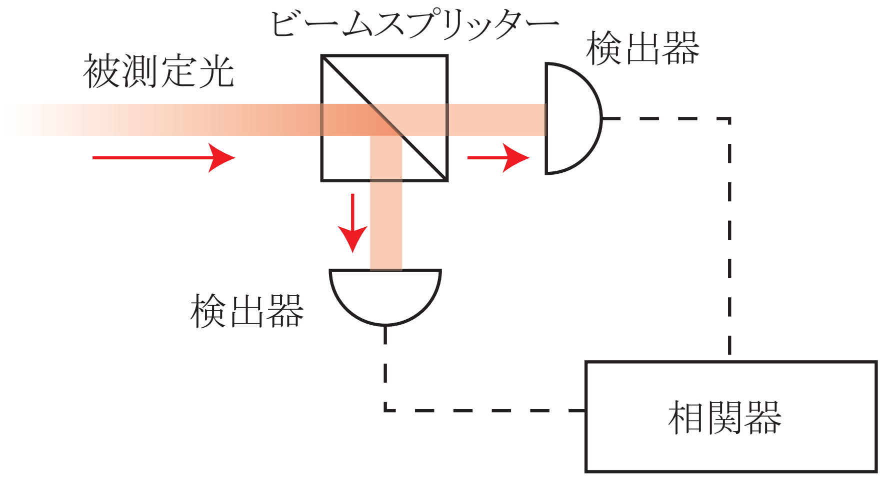

図 B.1 強度相関を測定するための系の模式図

間的に定常な光[*1]を考えることにすると，この時間平均はエルゴード定理[*2]によりアンサンブル平均 $\langle I(t)I(t+\tau)\rangle$ に等しい．実験的には，光のコヒーレンス時間より十分に長い時間測定を行えばよく，検出器の時間分解能はこの時間より十分に短ければよい．

強度相関の測定において実際に測定されるのは，2 つの検出器が時間間隔 τ で光電子を放出する相対確率である．古典電磁気学[*3]の範囲でこの実験を考える場合に基礎となる仮定は，検出器が光電子を放出する確率は検出器の受光面での瞬間の光強度[*4] $I(t)$ に比例するというものである．この仮定のもとでは，時刻 t から $t+\mathrm{d}t_1$ の間に一方の検出器が光電子を放出し，時刻 $t+\tau$ から $t+\tau+\mathrm{d}t_2$ の間にもう一方の検出器が光電子を放出する確率は $I(t)I(t+\tau)\mathrm{d}t_1\mathrm{d}t_2$ に比例するので，このような実験においても $\langle I(t)I(t+\tau)\rangle$ を測定していることになる．

測定される強度相関は，平均強度によって規格化した強度相関関数 $g^{(2)}(\tau)$ を用いて扱うのが便利であって，$g^{(2)}(\tau)$ は

$$g^{(2)}(\tau) \equiv \frac{\langle I(t)I(t+\tau)\rangle}{\langle I(t)\rangle\,\langle I(t+\tau)\rangle} \tag{B.1.1}$$

と定義される．この強度相関関数 $g^{(2)}(\tau)$ は，線形な損失を受けてもその値に影響を及ぼさない．線形な損失のモデルとしては，途中に透過率 η の吸収体を考えるのが適当であ

[*1] 揺らぎの統計を支配する要因が時間的に不変であるような光．換言すれば，相関関数が相対時間 τ だけに依存し，時間の原点のとりかたによらないような光

[*2] 時間平均は，一定の状態に保たれた多数の厳密に相似な系全体についての平均と同等である

[*3] 検出器は量子論で扱うので半古典論

[*4] サイクル平均強度

り，その場合は

$$g^{(2)}(\tau) = \frac{\langle \eta I(t) \eta I(t+\tau) \rangle}{\langle \eta I(t) \rangle \langle \eta I(t+\tau) \rangle} \tag{B.1.2}$$

となるが，η は分子分母で相殺されるために $g^{(2)}(\tau)$ の値は変化しない．ただし，このような損失を受ける場合，実験的には測定時間の増大という形で影響する．

τ が大きい極限的な状況を考えると，時刻 t における揺らぎと時刻 $t+\tau$ における揺らぎは統計的に独立に扱えるものと考えられるので，一般に

$$\begin{aligned} g^{(2)}(\tau) &= \frac{\langle I(t) I(t+\tau) \rangle}{\langle I(t) \rangle \langle I(t+\tau) \rangle} \\ &\to \frac{\langle I(t) \rangle \langle I(t+\tau) \rangle}{\langle I(t) \rangle \langle I(t+\tau) \rangle} = 1 \quad (\tau \to \infty) \end{aligned} \tag{B.1.3}$$

が成り立つ．自明な不等式

$$(\Delta I(t))^2 \equiv (I(t) - \langle I(t) \rangle)^2 \geq 0 \tag{B.1.4}$$

から，不等式

$$\begin{aligned} g^{(2)}(0) &= \frac{\langle I(t)^2 \rangle}{\langle I(t) \rangle^2} \\ &= \frac{\langle (I(t) - \langle I(t) \rangle + \langle I(t) \rangle)^2 \rangle}{\langle I(t) \rangle^2} \\ &= \frac{\langle (\Delta I(t) + \langle I(t) \rangle)^2 \rangle}{\langle I(t) \rangle^2} \\ &= 1 + \frac{\langle (\Delta I(t))^2 \rangle}{\langle I(t) \rangle^2} \geq 1 \end{aligned} \tag{B.1.5}$$

が成り立つことがわかる．この式からわかるように，$g^{(2)}(0)$ は強度揺らぎの大きさの指標となっている．

$\tau > 0$ で $g^{(2)}(0) > g^{(2)}(\tau)$ であることは，短い時間間隔で 2 つの光子が検出される確率のほうが長い時間間隔で 2 つの光子が検出される確率よりも高いことを示している．つまり，光子は束になって検出器にやってくるイメージであり，このような性質をバンチングという．この性質は，光子がボゾンであることの反映であると考えられる．

B.1.2　量子論による強度相関関数

量子論によって電磁場を取り扱う場合，電場 $E(t)$ を演算子と考えなければならない．このとき，電場を次のように正の周波数成分 $E^{(+)}(t)$ と負の周波数成分 $E^{(-)}(t)$ に分けて

考える．量子化された電場は，

$$\hat{E} = \sum_k \mathrm{i}\frac{\hbar\omega_k}{2\epsilon_0 V}\boldsymbol{\epsilon}_k\{\hat{a}_k \exp(-\mathrm{i}\omega_k t + \mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}\ ) - \hat{a}_k^\dagger \exp(\mathrm{i}\omega_k t - \mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}\ )\} \tag{B.1.6}$$

$$= \hat{E}^{(+)} + \hat{E}^{(-)} \tag{B.1.7}$$

で与えられる．検出器は光子を消滅させるから，位置 r に置かれた検出器が時刻 t で一個の光子を吸収する確率は，電磁場の始状態，終状態がそれぞれ $|i\rangle$ $|f\rangle$ であるとすると，

$$T_{if} = |\langle f|\,\hat{E}^{(+)}(r,t)\,|i\rangle\,|^2 \tag{B.1.8}$$

検出器でわかる電場強度 $I(t)$ に関しては，f について和をとることで計算できて，

$$I(t) \propto \sum_f T_{if} = \sum_f \langle i|\,\hat{E}^{(-)}(r,t)\,|f\rangle\,\langle f|\,\hat{E}^{(+)}(r,t)\,|i\rangle \tag{B.1.9}$$

$$= \langle i|\,\hat{E}^{(-)}(r,t)\hat{E}^{(+)}(r,t)\,|i\rangle \tag{B.1.10}$$

同様の考察から，時刻 t に一方の検出器で光子を検出し，その後時刻 $t+\tau$ にもう一方の検出器で光子が検出されるときの遷移確率は

$$T_{if} = |\langle f|\,\hat{E}^{(+)}(r,t+\tau)\hat{E}^{(+)}(r,t)\,|i\rangle\,|^2 \tag{B.1.11}$$

したがって $I(t)I(t+\tau)$ は

$$I(t)I(t+\tau) \propto \sum_f T_{if} = \langle i|\,\hat{E}^{(-)}(r,t)\hat{E}^{(-)}(r,t+\tau)\hat{E}^{(+)}(r,t+\tau)\hat{E}^{(+)}(r,t)\,|i\rangle \tag{B.1.12}$$

以上から量子論における強度相関関数の表式は

$$g^{(2)}(\tau) = \frac{\langle \hat{E}^{(-)}(r,t)\hat{E}^{(-)}(r,t+\tau)\hat{E}^{(+)}(r,t+\tau)\hat{E}^{(+)}(r,t)\rangle}{\langle \hat{E}^{(-)}(r,t)\hat{E}^{(+)}(r,t)\rangle\,\langle \hat{E}^{(-)}(r,t+\tau)\hat{E}^{(+)}(r,t+\tau)\rangle} \tag{B.1.13}$$

で与えられる．

線形な損失によって $g^{(2)}(\tau)$ が変化しないという性質は，量子論での取り扱いによっても古典論での場合と同様に成り立つ．この場合に適当なモデルとしては，途中にビームスプリッターを挿入するモデルであって，次のように真空のモード $\hat{E}_{vac}^{(+)}$ が混入する形での演算子の変換として与えられる．

$$\hat{E}_{out}^{(+)}(t) = \sqrt{\eta}\hat{E}_{in}^{(+)}(t) + \sqrt{1-\eta}\hat{E}_{vac}^{(+)} \tag{B.1.14}$$

式 (B.1.13) にこのような変換を行っても，真空は検出されず，また η は分子分母で相殺されるために，$g^{(2)}(\tau)$ の値は変化しない．

古典論の場合に成り立った不等式 (B.1.5) に関しては，量子論では一般には成り立たない．この点については，以降の小節でさらに詳しく見ていくことにする．

B.1.3　パルス列の強度相関

　これまでに扱ってきた強度相関は定常光の場合であるが，そうでない場合の強度相関について考える．定常でない光は，強度の期待値が相対時刻 τ だけでなく時刻 t にも依存し，(B.1.13) は時刻 t に依存するようになる．また，アンサンブル平均と単純な時間平均が一致せず，実験的に測定するのは困難になる．さらに，実際の検出器の時間分解能は有限であり，理論と完全な一致を見ることは難しい．しかし，パルス光のように周期的な光を用いることで，それらの困難は解決される．パルス光を用いることで，検出器の時間分解能がパルス幅より広くても，強度相関を測定することが可能となる．その場合，以下に述べるような定義を用いる．

　パルス列を考えるにあたって，光を周期ごとのブロックに区切って考える．ブロックを区別するため整数 k を用いる．充分短いパルスにおいては，この k に対して光は定常であるとみなせる．すなわち，定常光の場合の連続な時刻 t の代わりに離散的な k を用いることで，今までの議論と本質的に同じ議論ができる．この場合，次に示すような強度相関関数 $g^{(2)}(mT)$ を定義すると便利である．ただし，T はパルスの周期である．

$$g^{(2)}(mT) = \frac{\int_k \mathrm{d}t_1 \int_{k+m} \mathrm{d}t_2 \, \langle \hat{E}^{(-)}(t_1)\hat{E}^{(-)}(t_2)\hat{E}^{(+)}(t_2)\hat{E}^{(+)}(t_1)\rangle}{\int_k \mathrm{d}t_1 \, \langle \hat{E}^{(-)}(t_1)\hat{E}^{(+)}(t_1)\rangle \int_{k+m} \mathrm{d}t_2 \, \langle \hat{E}^{(-)}(t_2)\hat{E}^{(+)}(t_2)\rangle} \tag{B.1.15}$$

上の積分においては，積分範囲は指定されたブロック内とする．このとき，定常光について述べた議論はそのまま成り立つ．

B.1.4　P 関数を用いた $g^{(2)}(0)$ の表現

　単一モードの電場に対して量子論における強度相関関数 (B.1.13) を書き下すと，

$$g_i^{(2)}(0) = \frac{\langle \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_i \hat{a}_i \rangle}{\langle \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_i \rangle^2} \tag{B.1.16}$$

と書ける．これを，コヒーレント状態 $|\alpha\rangle$ を基底とした対角表示

$$\hat{\rho} = \int P(\alpha) \, |\alpha\rangle\langle\alpha| \, \mathrm{d}^2\alpha \tag{B.1.17}$$

を特徴付ける P 関数で表現することを考えよう．以下，本小節では積分範囲を明示しないが，一貫して複素平面全体にわたって積分することにする．

$$\begin{aligned} \langle \hat{a}^{\dagger n} \hat{a}^m \rangle &= \int P(\alpha) \, \langle\alpha| \, \hat{a}^{\dagger n} \hat{a}^m \, |\alpha\rangle \, \mathrm{d}^2\alpha \\ &= \int P(\alpha) \alpha^{*n} \alpha^m \mathrm{d}^2\alpha \end{aligned} \tag{B.1.18}$$

すなわち，$P(\alpha)$ を使うことによって，量子力学的な期待値をとる操作が古典的な平均を取る操作と同じ形に帰着されることがわかる．したがって，(B.1.16) は

$$\begin{aligned} g_i^{(2)}(0) &= \frac{\int P(\alpha_i)\alpha_i^{*2}\alpha_i^2 \mathrm{d}^2\alpha_i}{[\int P(\alpha_i)|\alpha_i|^2\mathrm{d}^2\alpha_i]^2} \\ &= \frac{\int P(\alpha_i)|\alpha_i|^4\mathrm{d}^2\alpha_i}{[\int P(\alpha_i)|\alpha_i|^2\mathrm{d}^2\alpha_i]^2} \\ &= \frac{\int P(\alpha_i)(|\alpha_i|^2 - \int P(\alpha_i)|\alpha_i|^2\mathrm{d}^2\alpha_i + \int P(\alpha_i)|\alpha_i|^2\mathrm{d}^2\alpha_i)^2\mathrm{d}^2\alpha_i}{[\int P(\alpha_i)|\alpha_i|^2\mathrm{d}^2\alpha_i]^2} \\ &= 1 + \frac{\int P(\alpha_i)(|\alpha_i|^2 - \int P(\alpha_i)|\alpha_i|^2\mathrm{d}^2\alpha_i)^2\mathrm{d}^2\alpha_i}{[\int P(\alpha_i)|\alpha_i|^2\mathrm{d}^2\alpha_i]^2} \end{aligned} \tag{B.1.19}$$

と表される．ただし，$P(\alpha)$ は規格化されており，

$$\int P(\alpha)\mathrm{d}^2\alpha = 1 \tag{B.1.20}$$

が成り立つこと，および平均値からのずれの平均は 0 であることから

$$\int P(\alpha)(|\alpha|^2 - \int P(\alpha)|\alpha|^2\mathrm{d}^2\alpha)\mathrm{d}^2\alpha = 0 \tag{B.1.21}$$

が成り立つことを用いた．

式 (B.1.19) は式 (B.1.5) と形式的には同じように見える．しかし $P(\alpha)$ は負値をとるかもしれないので，式 (B.1.19) では式 (B.1.5) のような不等式は成り立たず，$g^{(2)} < 1$, すなわち光子のアンチバンチングも有りうる．

B.2　現実的な光子検出器を用いた強度相関の測定

B.2.1　光子数敏感な検出器

光子数敏感な検出器には，光子数状態 $|n\rangle$ に作用して，光子数 n を測定値として返すことが要請される．このような演算子は光子数演算子 $\hat{n} = \hat{a}^\dagger\hat{a}$ そのものである．

後の議論のために，この測定演算子を構成する手法を考えておく．今，被測定状態が n 光子数状態 $|n\rangle$ であれば測定値 1 を，そうでなければ 0 を返すような測定演算子を $|n\rangle\langle n|$ と表せる．これを用いると，先に述べた光子数敏感な検出器は次のように表される:

$$\sum_{n=0}^{\infty} n\,|n\rangle\langle n| = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{a}^\dagger\hat{a}\,|n\rangle\langle n| = \hat{a}^\dagger\hat{a}. \tag{B.2.1}$$

ただし，$\hat{a}^\dagger\hat{a}\,|n\rangle = \hat{n}\,|n\rangle = n\,|n\rangle$ と，光子数状態の完備性を用いた．

この光子数敏感な検出器を用いると，単純に光子数を数えることで $\langle \hat{a}^\dagger \hat{a} \rangle$（の定数倍）が，図 B.1 のように測定することで $\langle \hat{a}^\dagger \hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{a} \rangle$（の定数倍）がそれぞれ得られる．しかし，このような測定器は存在しない．

B.2.2　現実の検出器

現実の単一光子検出器は，光子数弁別が不可能であり，検出効率が 1 より小さく，光子が無い場合にも反応する場合（ダークカウント）がある．検出確率を η，単位時間当たりのダークカウント数を ν として，簡単のために光子数弁別が可能であることを仮定すると，次のような測定演算子を作ることができる:

$$\Pi_n^{\mathrm{num}} = \sum_{k=0}^{n} \sum_{m=k}^{m=\infty} \frac{e^{-\nu} \nu^{n-k}}{(n-k)!} \eta^k (1-\eta)^{m-k} {}_m C_k \left| m \right\rangle\!\left\langle m \right| . \tag{B.2.2}$$

物理的な意味としては，「m 個の光子がきたときに，k 個の光子のそれぞれを 1 光子あたりの検出確率 η で検出し，ダークカウントレート ν によって定まるポアソン分布で与えられる確率で $n-k$ 個余分に検出した結果，n 個の光子を検出する」ことについて，m に関して無限まで考慮したものと解釈できる．

光子数弁別が不可能な現実の光子検出器であっても，$n=0$ については上記と同じなので以下のように書ける:

$$\Pi_0 = \Pi_0^{\mathrm{num}} = \sum_{m=0}^{\infty} e^{-\nu} (1-\eta)^m \left| m \right\rangle\!\left\langle m \right| . \tag{B.2.3}$$

$n \geq 1$ について区別できないことを考慮すると，その演算子を $\Pi_{\geq 1}$ は，測定演算子の完備性から以下のように表せる:

$$\Pi_{\geq 1} = 1 - \Pi_0 = \sum_{m=0}^{\infty} \left(1 - e^{-\nu}(1-\eta)^m\right) \left| m \right\rangle\!\left\langle m \right| . \tag{B.2.4}$$

ところで，$(1-\eta)^m$ を η の冪で表すと $\sum_{k=0}^{\infty} {}_m C_k (-\eta)^k$ である．これを用いると，$\Pi_{\geq 1}$ は次のように表せる．

$$\Pi_{\geq 1} = \sum_{m=0}^{\infty} \left((1-e^{-\nu}) - e^{-\nu} \sum_{k=1}^{\infty} {}_m C_k (-\eta)^k \right) \left| m \right\rangle\!\left\langle m \right| . \tag{B.2.5}$$

今，検出確率 $\eta \ll 1$ で，ダークカウントレート ν も $\eta^2 \sim 1 - e^{-\nu}$ が成り立つ程度に小さいことを仮定すると，η の 2 次以上の微小量を無視する近似で次の表式を得る:

$$\Pi_{\geq 1} \sim e^{-\nu} \sum_{m=0}^{\infty} m \left| m \right\rangle\!\left\langle m \right| . \tag{B.2.6}$$

これは，式 (B.2.1) に示した光子数弁別可能で検出確率 1, ダークカウントレートが無視できる理想的な測定の演算子に比例するものである．

実験で用いた単一光子検出器は，Perkin-Elmer model SPCM-AQR-14 であり，検出効率は 0.62 である．ただし，単一モードファイバーへの結合効率の影響などを加味すると，実効的な検出確率としては 20% 未満となる．加えて，位相整合の不完全さなどの要因が絡む場合もあり，検出確率について確かな情報を得ることは難しい．式 (B.2.6) は，現実的な単一光子検出器を用いた実験を，理想的な検出器を用いた理論によって定性的に取り扱うという通常よく用いられる手法の妥当性を示すものである．両者の差異については次の節で定性的に議論する．

B.3　様々な光の強度相関

本節では，コヒーレント光，サーマル（カオス）光，n 光子数状態のそれぞれの「強度相関」を理論的に見積る．ここでの「強度相関」は，図 B.1 のセットアップで測定される値である．すなわち，現実的な測定演算子 (B.2.4) を仮定した場合に測定される $g^{(2)}_{\mathrm{ac}} = \langle \Pi_{\geq 1}\Pi_{\geq 1}\rangle \,/\, \langle \Pi_{\geq 1}\rangle^2$ を計算する．なお，理想的な測定演算子を仮定した場合に測定可能な $g^{(2)}_{\mathrm{id}} = \langle \hat{a}^\dagger\hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{a}\rangle \,/\, \langle \hat{a}^\dagger\hat{a}\rangle^2$ は $\eta \to 0$ の極限を取ることで得られる．

強度相関は，原理的に光子数分布にしか感度を持っていない．したがって，純粋状態の場合でも一般性を失わずに次のような対角行列で考えてよい．

$$\rho = \sum_{n=0}^{\infty} p_n \left|n\right\rangle\!\left\langle n\right| = \sum_{n=0} \frac{p_n}{n!} (\hat{a}^\dagger)^n \left|0\right\rangle\!\left\langle 0\right| \hat{a}^n. \tag{B.3.1}$$

図 B.2 の表記で，ビームスプリッターによる消滅演算子の変換は次のように書ける [96]:

$$\begin{pmatrix} \hat{a} \\ \hat{a}_{\mathrm{vac}} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{a}_1 \\ \hat{a}_2 \end{pmatrix}. \tag{B.3.2}$$

式 (B.3.1) の $\hat{a}$ をこの式を用いて a_1, a_2 で表し，ここでも対角項のみ検討すれば十分であることを利用すると，次を得る:

$$\rho = \sum_{n=0} \frac{p_n}{n!2^n} (\hat{a}_1^\dagger + i\hat{a}_2^\dagger)^n \left|0_1, 0_2\right\rangle\!\left\langle 0_1, 0_2\right| (\hat{a}_1 - i\hat{a}_2)^n \tag{B.3.3}$$

$$\to \sum_{n=0} \sum_{k=0}^{n} \frac{p_n}{2^n} {}_nC_k \left|k, n-k\right\rangle\!\left\langle k, n-k\right|. \tag{B.3.4}$$

$\Pi_{\geq 1} = 1 - \Pi_0$ から，$\langle \Pi_{\geq 1}\Pi_{\geq 1}\rangle \to \langle \Pi^{(1)}_{\geq 1} \otimes \Pi^{(2)}_{\geq 1}\rangle = 1 - \langle \Pi^{(1)}_0 \otimes 1\rangle - \langle 1 \otimes \Pi^{(2)}_0\rangle + \langle \Pi^{(1)}_0 \otimes \Pi^{(2)}_0\rangle$，$\langle \Pi_{\geq 1}\rangle^2 \to \langle \Pi^{(1)}_{\geq 1} \otimes 1\rangle \langle 1 \otimes \Pi^{(2)}_{\geq 1}\rangle = 1 - \langle \Pi^{(1)}_0 \otimes 1\rangle - \langle 1 \otimes \Pi^{(2)}_0\rangle + \langle \Pi^{(1)}_0 \otimes 1\rangle \langle 1 \otimes \Pi^{(2)}_0\rangle$ が成り立ち，$A \equiv \langle \Pi^{(1)}_0 \otimes \Pi^{(2)}_0\rangle$，$B \equiv \langle \Pi^{(1)}_0 \otimes 1\rangle = \langle 1 \otimes \Pi^{(2)}_0\rangle$ を

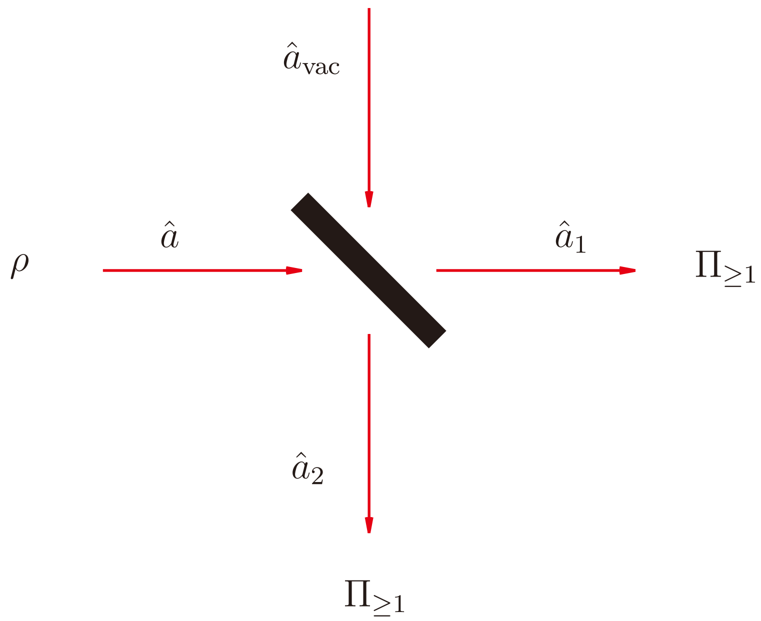

図 B.2　ビームスプリッターの入出力

用いて，強度相関を次のように表せる:

$$g_{\mathrm{ac}}^{(2)} = \frac{1-2B+A}{(1-B)^2} = 1 + \frac{A-B^2}{(1-B)^2}. \tag{B.3.5}$$

$$\begin{aligned} A(\nu,\eta) = \mathrm{Tr}\left[(\Pi_0^{(1)} \otimes \Pi_0^{(2)})\rho\right] &= e^{-2\nu}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{p_n}{2^n}(1-\eta)^n{}_nC_k \\ &= e^{-2\nu}\sum_{n=0}^{\infty}p_n(1-\eta)^n, \end{aligned} \tag{B.3.6}$$

$$\begin{aligned} B(\nu,\eta) = \mathrm{Tr}\left[(\Pi_0 \otimes 1)\rho\right] &= e^{-\nu}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{p_n}{2^n}(1-\eta)^k{}_nC_k \\ &= e^{-\nu}\sum_{n=0}^{\infty}p_n\left(1-\frac{\eta}{2}\right)^n. \end{aligned} \tag{B.3.7}$$

これらを用いて強度相関とダークカウントレートの関係について考えると，

$$g_{\mathrm{ac}}^{(2)} = 1 + \frac{\mathcal{O}(e^{-2\nu}) - \mathcal{O}(e^{-2\nu})}{\mathcal{O}(1)} \tag{B.3.8}$$

であることが分かる．したがって，ダークカウントレート ν が大きいとき，すなわち検出される信号の殆どがノイズに由来する場合，直感的なイメージと同様に，強度相関は光子数分布に依存せず 1 に近づく．

コヒーレント光

平均光子数 $|\alpha|^2$ のコヒーレント光の光子数分布はポアソン分布 $p_n = e^{-|\alpha|^2}|\alpha|^{2n}/n!$ で与えられる．

$$\begin{aligned} A &= e^{-2\nu}e^{-|\alpha|^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(|\alpha|^2(1-\eta))^n}{n!} \\ &= e^{-2\nu}e^{-|\alpha|^2}e^{|\alpha|^2(1-\eta)} \\ &= e^{-2\nu}e^{-\eta|\alpha|^2}, \end{aligned} \tag{B.3.9}$$

$$\begin{aligned} B &= e^{-\nu}e^{-|\alpha|^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(|\alpha|^2(1-\eta/2))^n}{n!} \\ &= e^{-\nu}e^{-|\alpha|^2}e^{|\alpha|^2(1-\eta/2)} \\ &= e^{-\nu}e^{-\eta|\alpha|^2/2}. \end{aligned} \tag{B.3.10}$$

したがって，ν, η によらず $A - B^2 = 0$ が成り立ち，式 (B.3.5) の最右辺からコヒーレント光の場合は常に $g_{\mathrm{ac}}^{(2)} = 1$ であるとわかる．

サーマル光

サーマル光の光子数分布は，パラメター p を用いて $p_n = (1-p)p^n$ で与えられる．

$$A = e^{-2\nu}\sum_{n=0}^{\infty}(1-p)p^n(1-\eta)^n = e^{-2\nu}\frac{1-p}{1-p(1-\eta)}, \tag{B.3.11}$$

$$B = e^{-\nu}\sum_{n=0}^{\infty}(1-p)p^n\left(1-\frac{\eta}{2}\right)^n = e^{-\nu}\frac{1-p}{1-p(1-\eta/2)}. \tag{B.3.12}$$

一般に $1 \le g_{\mathrm{ac}}^{(2)} \le 2$ であり，$p \to 0$, 検出確率 $\eta \to 0$ の極限で $g_{\mathrm{ac}}^{(2)} \to 2$ と漸近する．また，式 (B.1.16) で定義した $g^{(2)}$ に対して $g_{\mathrm{ac}}^{(2)} \le g^{(2)}$ を満たす．

n 光子数状態

n 光子数状態の光子数分布はクロネッカーのデルタを用いて $p_{n'} = \delta_{nn'}$ で与えられる．

$$A(\nu, \eta) = e^{-2\nu}(1-\eta)^n, \tag{B.3.13}$$

$$B(\nu, \eta) = e^{-\nu}(1-\eta/2)^n. \tag{B.3.14}$$

ダークカウントレート $\nu = 0$ の場合の，強度相関の検出確率依存性を図 B.4 に示した．また，単一光子数状態の強度相関について，様々なダークカウントレートにおける検出確率依存性を図 B.5 に示した．一般に $g_{\mathrm{ac}}^{(2)} \le 1$ であり，特に $n = 1$ の単一光子数状態では検出確率によらず $g_{\mathrm{ac}}^{(2)} = 0$ となる．

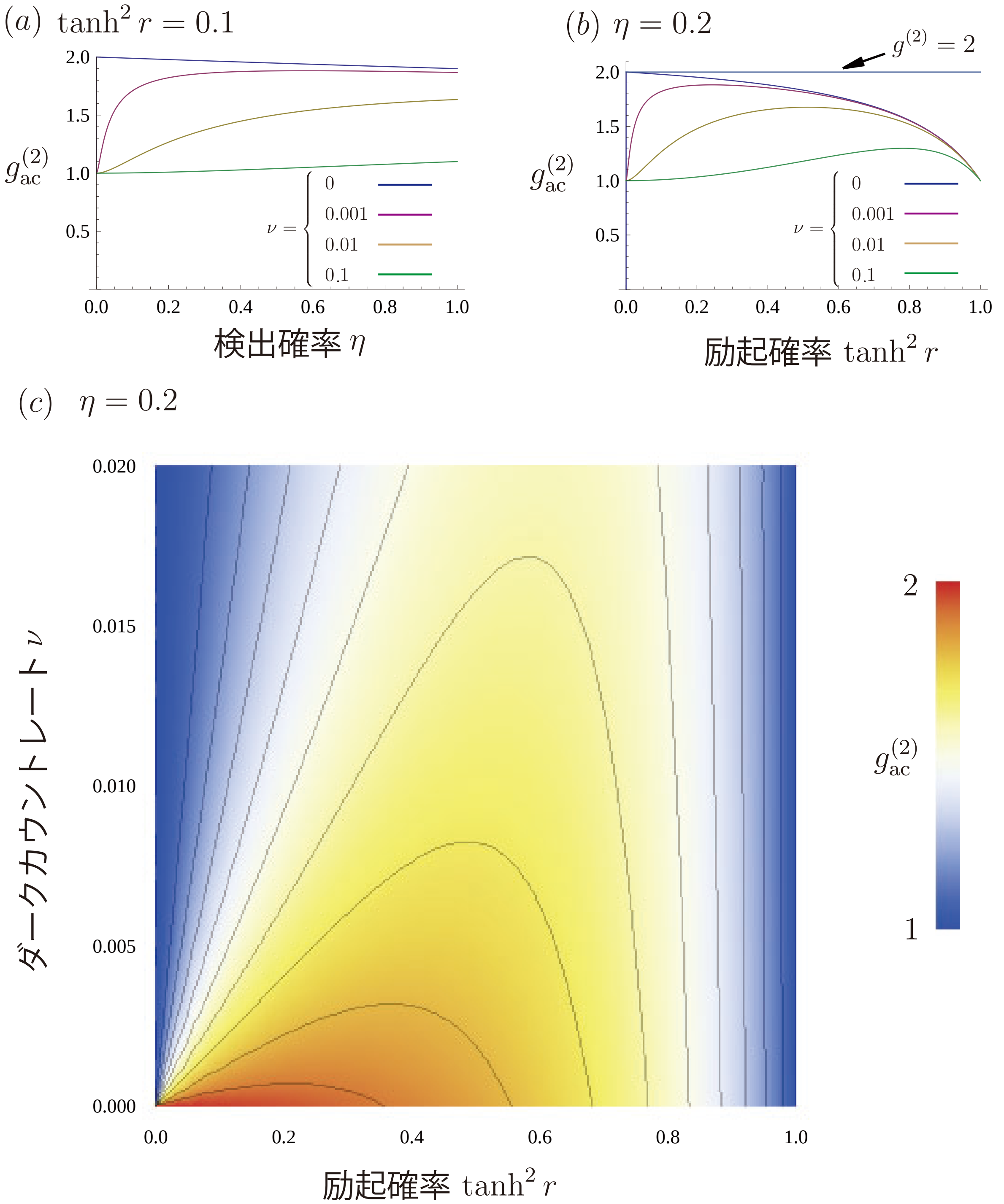

図 B.3　サーマル光の強度相関

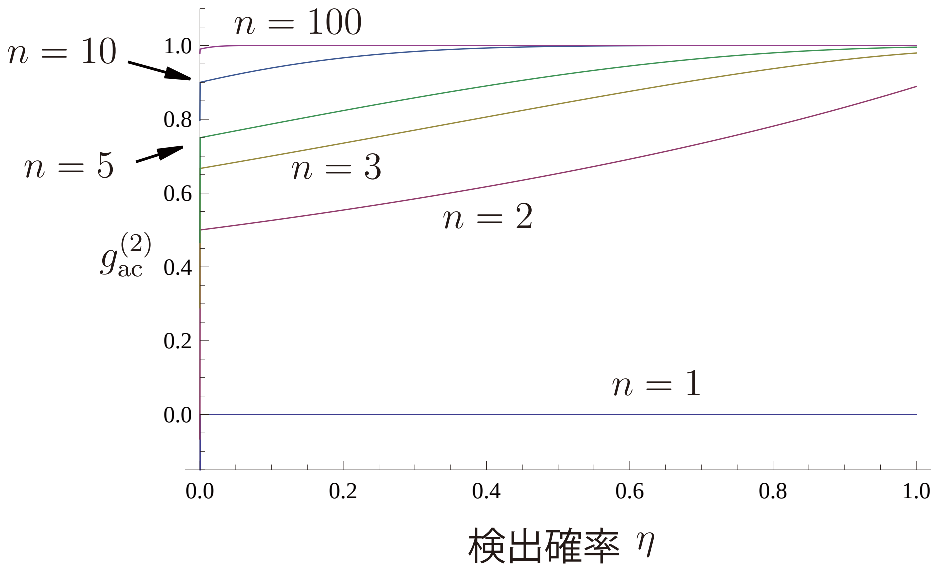

図 B.4　n 光子数状態の強度相関の検出確率依存性．$\nu = 0$ とした．一般に $g_{\mathrm{ac}}^{(2)} \leq 1$ であり，特に $n = 1$ の単一光子数状態では検出確率によらず $g_{\mathrm{ac}}^{(2)} = 0$ となる．有限の大きさのダークカウントがある場合には，それぞれ 1 に近づく．

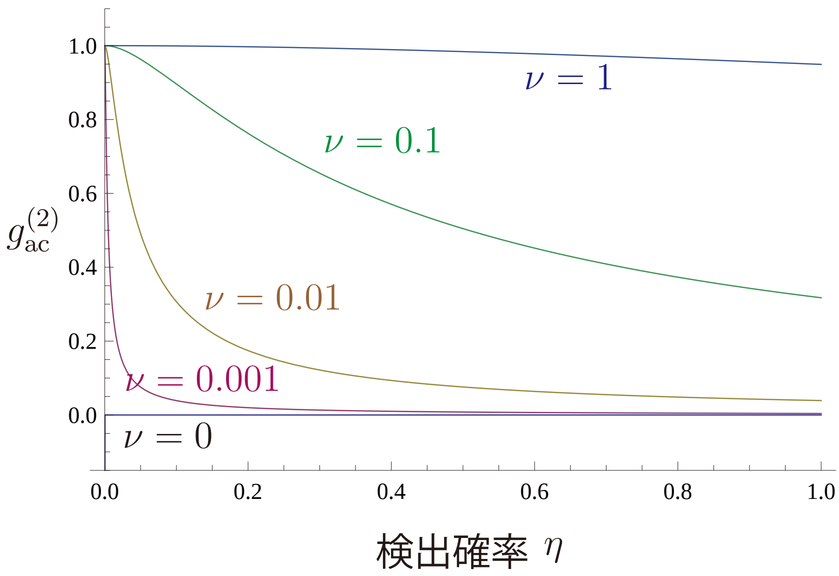

図 B.5　単一光子数状態の強度相関の検出確率依存性．

非古典光子対

式 (3.1.3) に与えた非古典相関を持つことが期待される光子対の状態

$$|\psi\rangle = U|0_1\rangle|0_2\rangle = \frac{1}{\cosh r}\sum_{n=0}^{\infty}(-\tanh r)^n |n_1\rangle|n_2\rangle, \tag{B.3.15}$$
$$U = \exp\left[r(\hat{a}_1^\dagger\hat{a}_2^\dagger - \hat{a}_1\hat{a}_2)\right]$$

についても本節で得た結果を用いて強度相関等を計算しておく．

まず，各モードの自己相関であるが，一方の部分系をトレースアウトして得られる状態

$$\rho = \mathrm{Tr}_2\left[|\psi\rangle\langle\psi|\right] = \frac{1}{\cosh^2 r}\sum_{n=0}^{\infty}\tanh^2 r\,|n\rangle\langle n| \equiv \sum_{n=0}^{\infty}p_n|n\rangle\langle n| \tag{B.3.16}$$

は，$1/\cosh^2 r = 1-\tanh^2 r$ に注意すると $p = \tanh^2 r$ のサーマル光そのものである．したがって，図 B.3 とまったく同様になる．

続いて相互相関であるが，$A(\nu,\eta)$，$B(\nu,\eta)$ に相当するパラメターは次のように書ける:

$$A' = \mathrm{Tr}\left[(\Pi_0^{(1)}\otimes\Pi_0^{(2)})|\psi\rangle\langle\psi|\right] = e^{-2\nu}\frac{1}{\cosh^2 r}\sum_{n=0}^{\infty}((1-\eta)^2\tanh^2 r)^n$$
$$= e^{-2\nu}\frac{(1-\tanh^2 r)}{1-(1-\eta)^2\tanh^2 r}, \tag{B.3.17}$$
$$B' = \mathrm{Tr}\left[(\Pi_0\otimes 1)|\psi\rangle\langle\psi|\right] = e^{-\nu}\frac{1}{\cosh^2 r}\sum_{n=0}^{\infty}((1-\eta)\tanh^2 r)^n$$
$$= e^{-\nu}\frac{(1-\tanh^2 r)}{1-(1-\eta)\tanh^2 r}. \tag{B.3.18}$$

したがって，$g_{\mathrm{ac}}^{(2)}$ は $p = \tanh^2 r$ として次のようになる:

$$g_{\mathrm{ac}}^{(2)} = 1 + \frac{e^{-2\nu}\eta^2 p(1-p)}{(1-(1-\eta)^2 p)(1-(1-\eta)p - e^{-\nu}(1-p))^2}. \tag{B.3.19}$$

ダークカウントレート ν が大きいときには，これまでの議論とまったく同様に相互強度相関も 1 に近づく．相互強度相関と式 (3.1.15) で定義した非古典性のパラメター R の検出確率依存性，励起確率依存性を図 B.6, 図 B.7 に示す．検出確率が低い極限で光子数敏感な測定を仮定した議論に漸近するのは式 (B.2.6) に示した通りである．現実的な検出器で測定される相互強度相関，非古典性のパラメター R は，理想的な測定を仮定した場合と比較して，任意の η, ν に対して低い値を取るだろうことが推察される．すなわち，現実的な検出器を用いて評価された相互強度相関，パラメター R は，1 次や 2 次のモーメントを用いて定義された通常の相互強度相関，パラメター R の下限を与える．この結果から，

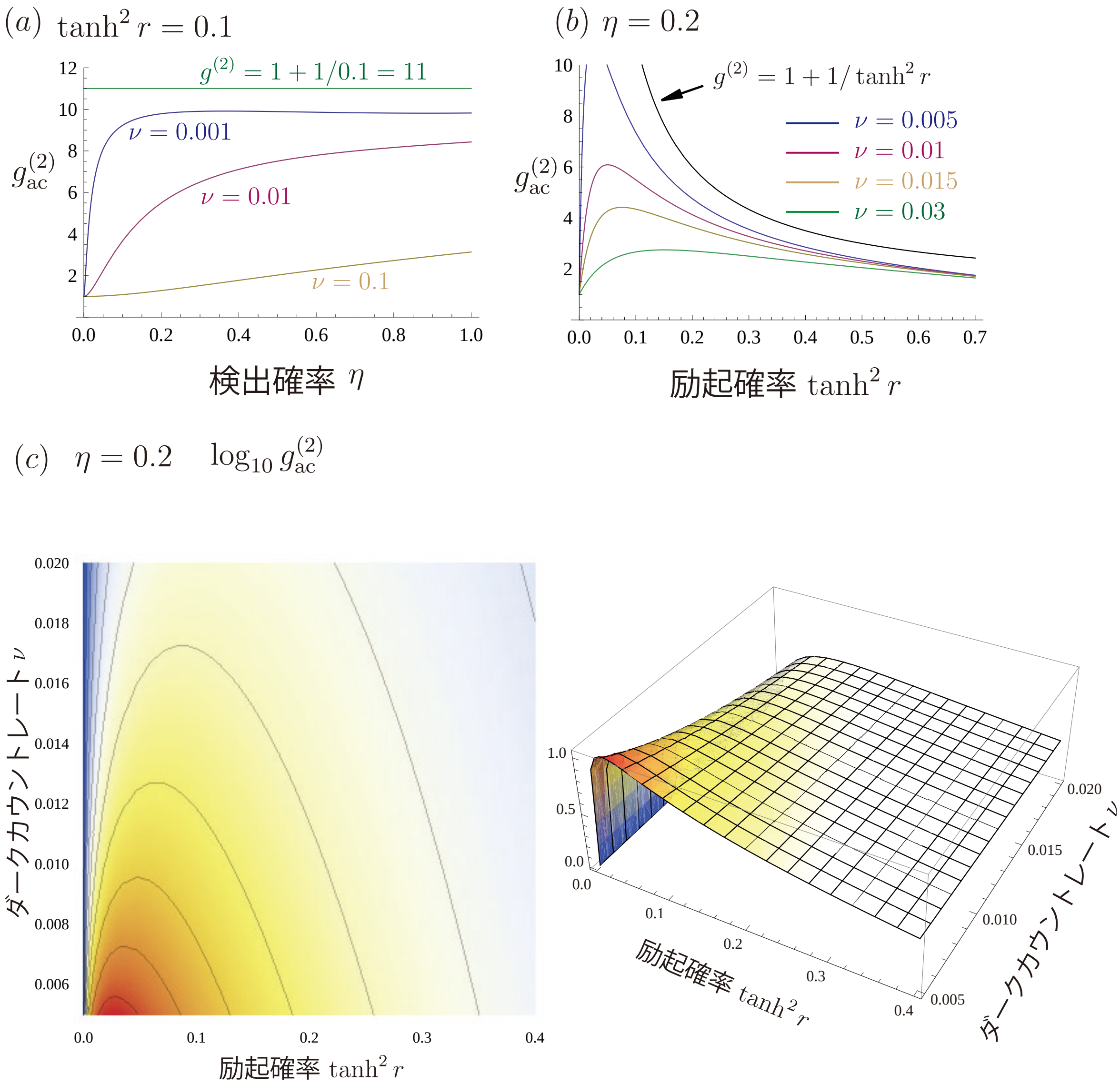

図 B.6　非古典相関を持った光子対の相互強度相関

励起確率を下げて高い強度相関を得るためには，ダークカウントレート[*5]を極力低くする必要があることがわかる．

[*5] 通常ダークカウントレートは検出器に固有だが，ここでは迷光を検出器が拾ってしまう効果も含めてダークカウントと呼んでいる．すなわち，十分ダークカウントレートが低い検出器を用意し，光学系を工夫して S/N 比をうまく稼ぐことが重要である．

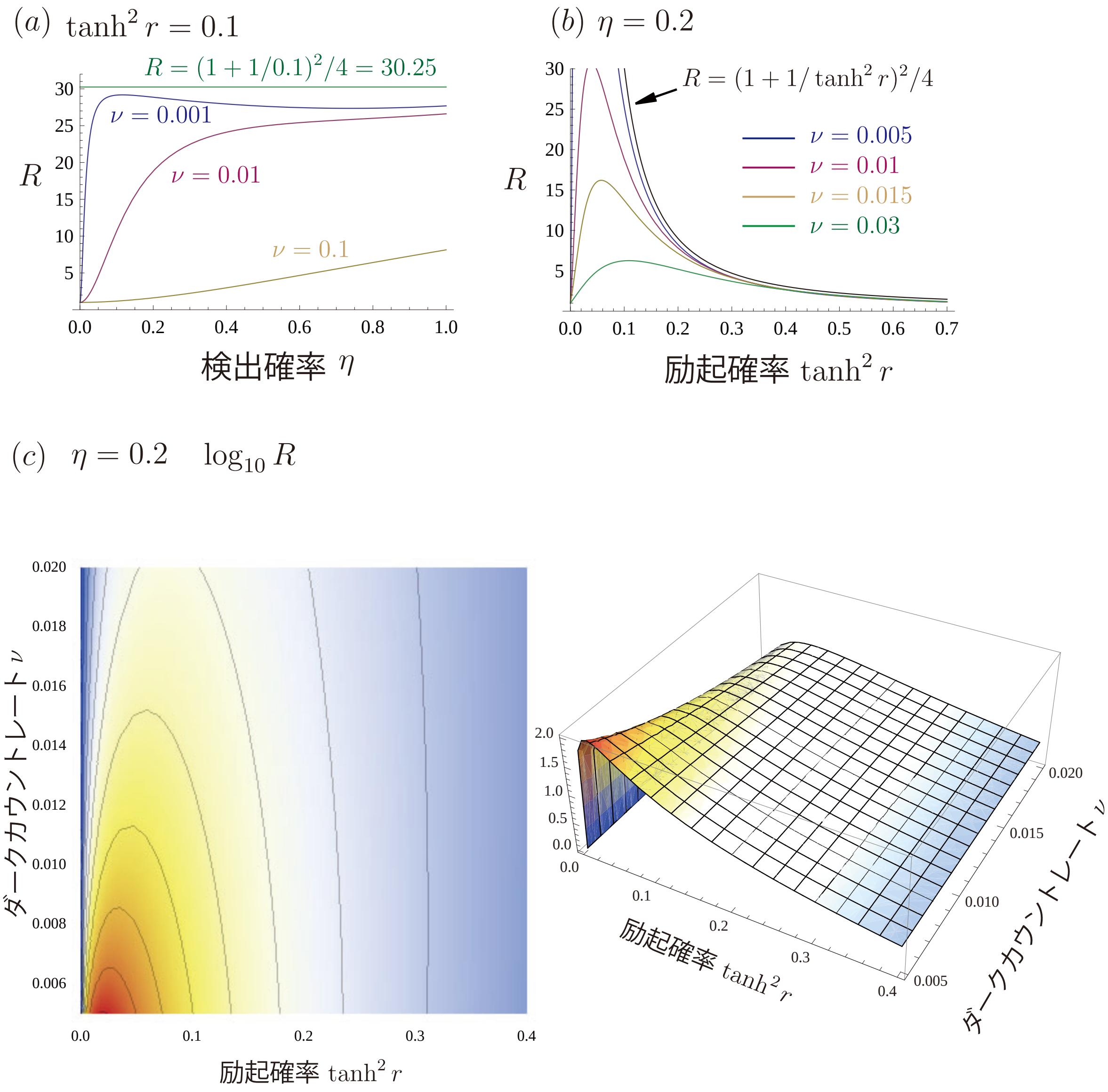

図 B.7　非古典相関と測定上のパラメター

付録 C

原子集団の状態の読み出し

第 2 章では，原子集団と古典光の集団相互作用によって集団的スピンと単一光子とが同時に励起されることを示した．単一光子の状態については，パラメトリック下方変換で得られる光子対に関する実験でよく行われているように，既存のよく知られた技術を用いて比較的容易に測定が可能である．2 者間のエンタングルメントを実験的に評価するにあたっては，エンタングルメントを共有する各々に対して自由に測定できることが要請されるため，本研究においては原子集団の集団的励起状態を測定する手法を導入する必要がある．本研究で取った手法は，電磁誘起透明化を用いた量子メモリ [28] の再生過程に相当する操作を利用して，原子集団の状態を光子の状態に転写する手法である．本章では，電磁誘起透明化とそれを基にした量子メモリについて説明し，この手法が妥当であることを示す.

C.1　電磁誘起透明化

電磁誘起透明化 (EIT: Electromagnetically Induced Transparency) とは，Λ 型 3 準位系で表現される原子集団の遷移間の暗干渉を利用して，光学応答を制御する技術である．EIT においては，図 C.1 に示されているように，原子系には 2 つの場が作用する．この 2 つの場を，それぞれプローブ光, コントロール光と名づける．

図 C.1 で表現されるような，量子的な原子集団とそれに結合した古典的な 2 つの電場からなる系を記述するハミルトニアン $\hat{H}$ は，遷移 $|i\rangle \to |j\rangle$ の電気双極子モーメントを

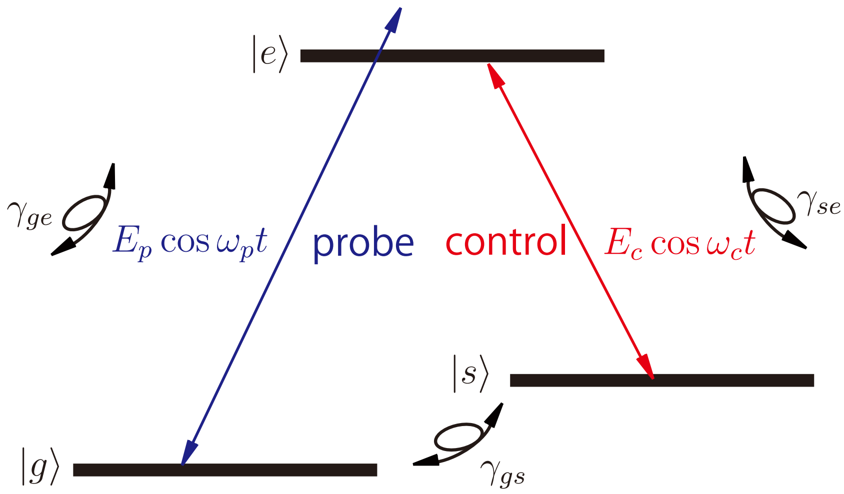

図 C.1　Λ 型 3 準位系．角周波数 ω_c で振動する電場 $\mathscr{E}_c \cos\omega_c t$ で表現されるコントロール光は，遷移 $|s\rangle \to |e\rangle$ に共鳴的に作用する．角周波数 ω_p で振動する電場 $\mathscr{E}_p \cos\omega_p t$ で表現されるプローブ光は，遷移 $|g\rangle \to |e\rangle$ に離調 Δ で作用する．γ は準位間のコヒーレンスの緩和レートである．

$\mu_{ij} = \mu_{ij}^{*}$ [*1]，$|i\rangle$ に相当する内部エネルギーを $\hbar\omega_i$ として，次のように表現できる：

$$\begin{aligned} \hat{H} &= \hat{H}_0 + \hat{V}, \\ \text{where} \quad \hat{H}_0 &= \hbar\omega_g |g\rangle\langle g| + \hbar\omega_e |e\rangle\langle e| + \hbar\omega_s |s\rangle\langle s|, \\ \hat{V} &= -\mu_{ge}\mathscr{E}_p \cos\omega_p t\, |e\rangle\langle g| - \mu_{se}\mathscr{E}_c \cos\omega_c t\, |e\rangle\langle s| + h.c. \end{aligned}$$

相互作用表示に移ると，系を記述するハミルトニアン $\hat{V}_I$ が次のように得られる．

$$\begin{aligned} \hat{V}_I &\equiv e^{i\hat{H_0 t}/\hbar}\hat{V}e^{-i\hat{H_0 t}/\hbar} \\ &= -\hbar\left(\frac{\Omega_p}{2}e^{-i\phi}e^{i\Delta t}|g\rangle\langle e| + \frac{\Omega_c}{2}e^{-i\varphi}|s\rangle\langle e|\right) + h.c. \end{aligned} \tag{C.1.1}$$

ここで，複素ラビ周波数 $\Omega_p e^{-i\phi}$，$\Omega_c e^{-i\varphi}$ を導入した．なお，最後の変形では回転波近似を行い，残された項に比べて位相の時間発展が非常に速い (光の周波数のオーダーの) 項を落としている．また，$\omega_p = \omega_e - \omega_g - \Delta$, $\omega_c = \omega_e - \omega_s$ を用いた．

この相互作用ハミルトニアン $\hat{V}_I$ の固有値と固有ベクトルの組 ($\hat{V}_I |\psi_i\rangle = \lambda_i |\psi_i\rangle$) を求

[*1] 位相部分は複素振幅に押し付けることができるので，実数に選んでも一般性を失わない．

めると，$\Omega^2 = \Omega_p^2 + \Omega_c^2$ として，$\{\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3\} = \{0,\ \hbar\Omega/2,\ -\hbar\Omega/2\}$ に対して

$$|\psi_1\rangle = \frac{\Omega_p}{\Omega} e^{-i(\phi-\Delta t)} |g\rangle - \frac{\Omega_c}{\Omega} e^{-i\varphi} |s\rangle, \tag{C.1.2}$$

$$|\psi_2\rangle = \left(\frac{\Omega_p}{\Omega} e^{-i(\phi-\Delta t)} |g\rangle + \frac{\Omega_c}{\Omega} e^{-i\varphi} |s\rangle - |e\rangle \right) /\sqrt{2}, \tag{C.1.3}$$

$$|\psi_3\rangle = \left(\frac{\Omega_p}{\Omega} e^{-i(\phi-\Delta t)} |g\rangle + \frac{\Omega_c}{\Omega} e^{-i\varphi} |s\rangle + |e\rangle \right) /\sqrt{2}. \tag{C.1.4}$$

これらの固有状態から励起状態 $|e\rangle$ への “励起確率”[*2]は，それぞれ次のように計算できる．

$$|\langle e|\hat{V}_I|\psi_1\rangle|^2 = |\lambda_1 \langle e|\psi_1\rangle|^2 = 0, \tag{C.1.5}$$

$$|\langle e|\hat{V}_I|\psi_2\rangle|^2 = |\lambda_2 \langle e|\psi_2\rangle|^2 = (\hbar\Omega/4)^2, \tag{C.1.6}$$

$$|\langle e|\hat{V}_I|\psi_3\rangle|^2 = |\lambda_3 \langle e|\psi_3\rangle|^2 = (\hbar\Omega/4)^2. \tag{C.1.7}$$

$|\langle e|\hat{V}_I|\psi_1\rangle|^2 = 0$ であることは，$|\psi_1\rangle$ の成分がプローブ光やコントロール光といった光を吸収しないことを意味する．この意味で $|\psi_1\rangle$ は暗状態と呼ばれる．一方，$|\psi_2\rangle$，$|\psi_3\rangle$ は光を吸収し，$|e\rangle$ へ励起される．励起された原子は自然放出によって下準位に落ちるが，落ちた後の状態はもとの $|\psi_2\rangle$，$|\psi_3\rangle$ とは異なる状態であり，暗状態を含むことが期待される．この過程を繰り返すことによって，どんな初期状態から相互作用を開始したとしても最終的にはすべての原子が暗状態となることが期待できる．原子集団を構成しているすべての原子が暗状態となれば，その原子集団は光を吸収しない．コントロール光と名づけた電磁場によってプローブ光から見た原子集団の透明化が引き起こされたこの現象が電磁誘起透明化 (EIT) である．

この結果は，原子集団の密度行列 ρ の時間発展を解析することによって，より詳細に議論できる．密度行列 ρ の時間発展は，運動方程式 $i\hbar\dot{\rho} = [\hat{V}_I, \rho]$ に従うが，これを用いて密度行列の非対角成分 $\rho_{ij} = \langle i|\rho|j\rangle$ の時間発展を書き下すと次のようになる:

$$\begin{cases} \dot{\rho}_{ge} = -i\dfrac{\Omega_p}{2} e^{-i(\phi-\Delta t)} (\rho_{gg} - \rho_{ee}) - i\dfrac{\Omega_c}{2} e^{-i\varphi} \rho_{gs}, & \text{(C.1.8a)} \\ \dot{\rho}_{gs} = i\dfrac{\Omega_p}{2} e^{-i(\phi-\Delta t)} \rho_{se}^* - i\dfrac{\Omega_c}{2} e^{i\varphi} \rho_{ge}, & \text{(C.1.8b)} \\ \dot{\rho}_{se} = -i\dfrac{\Omega_p}{2} e^{-i(\phi-\Delta t)} \rho_{gs}^* - i\dfrac{\Omega_c}{2} e^{-i\varphi} (\rho_{ss} - \rho_{ee}). & \text{(C.1.8c)} \end{cases}$$

表記を簡単にするために次の回転座標系に移る:

$$\tilde{\rho}_{ii} = \rho_{ii},\ \rho_{ge} = \tilde{\rho}_{ge} e^{-i(\phi-\Delta t)},\ \rho_{se} = \tilde{\rho}_{se} e^{-i\varphi},\ \rho_{gs} = \tilde{\rho}_{gs} e^{-i(\phi-\varphi-\Delta t)}. \tag{C.1.9}$$

[*2] ここでは確率振幅が 0 であるか否かが論点で，もし 0 であるならば，真の励起確率も 0 であると言える．

これを用いて時間発展を書き直すと，次を得る:

$$\begin{cases} \dot{\tilde{\rho}}_{ge} = -i\Delta\tilde{\rho}_{ge} - i\dfrac{\Omega_p}{2}\left(\tilde{\rho}_{gg} - \tilde{\rho}_{ee}\right) - i\dfrac{\Omega_c}{2}\tilde{\rho}_{gs}, & \text{(C.1.10a)} \\ \dot{\tilde{\rho}}_{gs} = -i\Delta\tilde{\rho}_{gs} + i\dfrac{\Omega_p}{2}\tilde{\rho}^*_{se} - i\dfrac{\Omega_c}{2}\tilde{\rho}_{ge}, & \text{(C.1.10b)} \\ \dot{\tilde{\rho}}_{se} = -i\dfrac{\Omega_p}{2}\tilde{\rho}^*_{gs} - i\dfrac{\Omega_c}{2}\left(\tilde{\rho}_{ss} - \tilde{\rho}_{ee}\right). & \text{(C.1.10c)} \end{cases}$$

図 C.1 を参照し，現象論的に緩和項を入れる:

$$\begin{cases} \dot{\tilde{\rho}}_{ge} = -i\Delta\tilde{\rho}_{ge} - i\dfrac{\Omega_p}{2}\left(\tilde{\rho}_{gg} - \tilde{\rho}_{ee}\right) - i\dfrac{\Omega_c}{2}\tilde{\rho}_{gs} - \gamma_{ge}\tilde{\rho}_{ge}, & \text{(C.1.11a)} \\ \dot{\tilde{\rho}}_{gs} = -i\Delta\tilde{\rho}_{gs} + i\dfrac{\Omega_p}{2}\tilde{\rho}^*_{se} - i\dfrac{\Omega_c}{2}\tilde{\rho}_{ge} - \gamma_{gs}\tilde{\rho}_{gs}, & \text{(C.1.11b)} \\ \dot{\tilde{\rho}}_{se} = -i\dfrac{\Omega_p}{2}\tilde{\rho}^*_{gs} - i\dfrac{\Omega_c}{2}\left(\tilde{\rho}_{ss} - \tilde{\rho}_{ee}\right) - \gamma_{se}\tilde{\rho}_{se}. & \text{(C.1.11c)} \end{cases}$$

コントロール光がプローブ光より十分に強い $(\Omega_p \ll \Omega_c)$ 場合，$\rho_{gg} = 1, \rho_{ee} = \rho_{ss} = 0$ と見なせる．このとき，次のように簡略化される．

$$\begin{cases} \dot{\tilde{\rho}}_{ge} = -(\gamma_{ge} + i\Delta)\tilde{\rho}_{ge} - i\dfrac{\Omega_p}{2} - i\dfrac{\Omega_c}{2}\tilde{\rho}_{gs}, & \text{(C.1.12a)} \\ \dot{\tilde{\rho}}_{gs} = -(\gamma_{gs} + i\Delta)\tilde{\rho}_{gs} + i\dfrac{\Omega_p}{2}\tilde{\rho}^*_{se} - i\dfrac{\Omega_c}{2}\tilde{\rho}_{ge}, & \text{(C.1.12b)} \\ \dot{\tilde{\rho}}_{se} = -i\dfrac{\Omega_p}{2}\tilde{\rho}^*_{gs} - \gamma_{se}\tilde{\rho}_{se}. & \text{(C.1.12c)} \end{cases}$$

今興味があるのは，原子集団に対するプローブ光の応答を記述する $\tilde{\rho}_{ge}$ の表式である．$\Omega_p/\Omega_c \ll 1$ のもとでの定常解は以下の通りである:

$$\tilde{\rho}_{ge} = \frac{-i(\gamma_{gs} + i\Delta)\Omega_p/2}{(\gamma_{ge} + i\Delta)(\gamma_{gs} + i\Delta) + \Omega_c^2/4}. \tag{C.1.13}$$

物質中の分極 $\mathscr{P}$, 印加電場 $\mathscr{E}$, 真空の誘電率 ϵ_0 に対して $\mathscr{P} = \epsilon_0\chi\mathscr{E}$ で定義される複素感受率 χ は，このようにして求められた $\tilde{\rho}_{ge}$, 原子の数密度 N, 本章の最初に与えた電気双極子モーメント μ_{ge} を用いて $\chi = N\tilde{\rho}_{ge}\mu_{ge}^2/\epsilon_0\hbar\Omega_p$ で与えられる．複素感受率 χ の媒体の誘電率は $\epsilon = \epsilon_0(1+\chi)$ で与えられ，この媒質中を z 方向正の向きに進む角周波数 ω_p の平面波は $k = \sqrt{1+\chi}\omega_p/c$ を用いて $E\exp(-ikz)$ で与えられる．ここで，c は真空中の光速である．k の実部と虚部をそれぞれ η, $-\kappa$ とすると，媒質中を伝播することで先の平面波は $E\exp(-ikz) = E\exp(-\kappa z)\exp(-i\eta z)$ と書き換わり，真空中を伝播する場合と比較して，κ による減衰と η による位相シフトを受ける．このように定義された $\kappa = -\Im[\sqrt{1+\chi}]$ を吸収係数，$\eta = \Re[\sqrt{1+\chi}]$ を屈折率と呼ぶ [97]．式 (C.1.13) から κ, η の離調 Δ に対する応答が得られる．いくつかのコントロール光のラビ周波数 Ω_c に対して，下準位間の緩和 $\gamma_{gs} = 0$ のもとで κ と η をプロットした結果を図 C.2 に示した．相

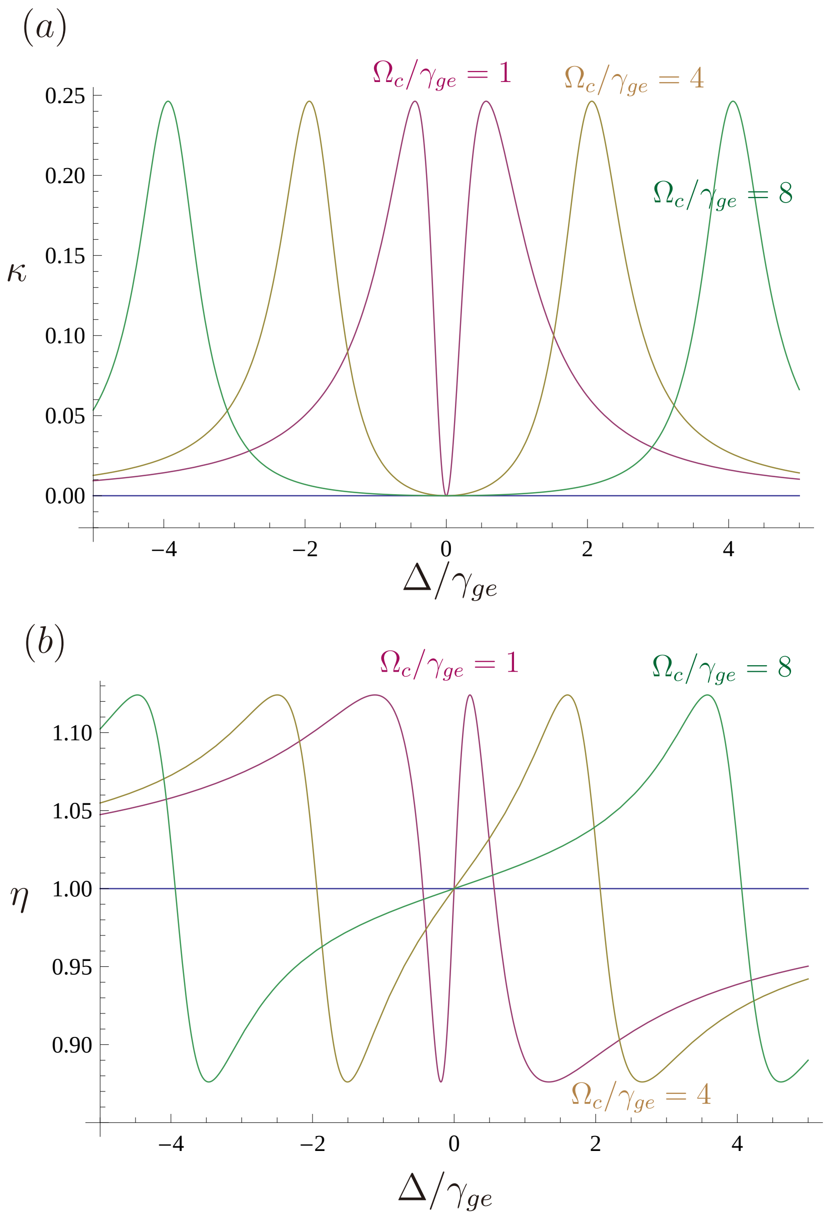

図 C.2　電磁誘起透明化媒質中における吸収係数と屈折率の周波数応答．(a) 吸収係数．(b) 屈折率．縦軸は任意単位．横軸は，緩和レート γ_{ge} を単位とした離調 Δ である．Ω_c はコントロール光のラビ周波数であり，$\Omega_c/\gamma_{ge}=\{1,4,8\}$ のそれぞれをプロットした．

互作用ハミルトニアンの固有ベクトルを用いて議論した結果と同様に，吸収の消失が確認できた．また，コントロール光のラビ周波数，すなわちコントロール光の強度を小さくすることで吸収が失われる周波数領域，屈折率分散の傾きを鋭くできることがわかる．

ここまでで得られたような，波数 $k(\omega)=\sqrt{1+\chi(\omega)}\omega/c$ を与える媒質中を z 軸方向正の向きに伝播する中心角周波数 ω_p の光パルスの伝播速度を考えよう．まず，パルス状の

平面波を

$$U(z,t) = A(z,t)\exp(i\omega_p t - ik(\omega)z) \tag{C.1.14}$$

で表す．ここで，$A(z,t)$ は光パルスの複素包絡線である．今，$A(0,t) = \mathscr{A}(0,\omega)e^{i\omega t}$ とすると，$U(z,t) = U(0,t)\exp(-ik(\omega_p+\omega)z)$ にしたがって変化することになる．式 (C.1.14) を用いると，包絡線関数は z に対して線形に応答する:

$$\begin{aligned}\mathscr{A}(z,\omega) &= \mathscr{A}(0,\omega)K(\omega), \\ \text{where, } K(\omega) &= \exp\left[i\{k(\omega_p) - k(\omega_p+\omega)\}z\right].\end{aligned} \tag{C.1.15}$$

包絡線関数 $A(z,t)$ の時間幅が十分に長く，その周波数広がりが殆ど無視できるような光パルスに限定すると，$\omega = 0$ 近傍のみを評価に含めれば十分である．このような場合，光パルスに含まれる周波数成分は中心周波数 ω_p 近傍が支配的で，図 C.2 の $\Delta = 0$ 近傍の 0 に近い κ, 線形な $\eta(\omega)$ の寄与が支配的となるから，$k(\omega) = \sqrt{1+\chi}\omega/c \sim \eta(\omega)\omega/c$ と見なせる．すなわち，次の関係が成り立つことを仮定する:

$$c\frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}\omega} = \eta(\omega) + \omega\frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}\omega}, \tag{C.1.16}$$

$$c\frac{\mathrm{d}^2k}{\mathrm{d}\omega^2} = 2\frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}\omega} + \omega\frac{\mathrm{d}^2\eta}{\mathrm{d}\omega^2} \sim 2\frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}\omega}, \tag{C.1.17}$$

$$c\frac{\mathrm{d}^3k}{\mathrm{d}\omega^3} \sim 2\frac{\mathrm{d}^2\eta}{\mathrm{d}\omega^2} \sim 0. \tag{C.1.18}$$

このとき，$k(\omega_p+\omega)$ の ω_p 近傍での展開を初めの 3 項で打ち切るのは良い近似であり，さらに $\omega_p \gg \omega$ にも注意すると初めの 2 項で十分近似できることが分かる．

$$\begin{aligned}k(\omega_p+\omega) &= k(\omega_p) + \omega\frac{\mathrm{d}k(\omega_p)}{\mathrm{d}\omega} + \frac{1}{2}\omega^2\frac{\mathrm{d}^2k(\omega_p)}{\mathrm{d}\omega^2} + \cdots \\ &\sim k(\omega_p) + \frac{\omega}{c}\left(\eta(\omega_p) + \omega_p\frac{\mathrm{d}\eta(\omega_p)}{\mathrm{d}\omega} + \omega\frac{\mathrm{d}\eta(\omega_p)}{\mathrm{d}\omega}\right) \\ &\sim k(\omega_p) + \frac{\omega}{c}\left(\eta(\omega_p) + \omega_p\frac{\mathrm{d}\eta(\omega_p)}{\mathrm{d}\omega}\right).\end{aligned} \tag{C.1.19}$$

なお，$\frac{\mathrm{d}k(\omega_p)}{\mathrm{d}\omega}$ は $\left.\frac{\mathrm{d}k(\omega)}{\mathrm{d}\omega}\right|_{\omega=\omega_p}$ を意味し，2 階の微分についても同様である．これを式 (C.1.15) に代入すると，包絡線関数 $\mathscr{A}(z,\omega)$ の z 軸方向への伝播が次の式で記述されることがわかる:

$$\mathscr{A}(z,\omega) = \mathscr{A}(0,\omega)\exp\left(-i\omega\cdot\frac{z}{c}\left(\eta(\omega_p) + \omega_p\frac{\mathrm{d}\eta(\omega_p)}{\mathrm{d}\omega}\right)\right). \tag{C.1.20}$$

したがって，EIT によって吸収が消失した媒質中を伝播する中心周波数 ω_p の光パルスの群速度は v_g は次のように表せる:

$$\frac{1}{v_g} = \frac{1}{c}\left(\eta(\omega_p) + \omega_p\frac{\mathrm{d}\eta(\omega_p)}{\mathrm{d}\omega}\right) = \left.\frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}\omega}\right|_{\omega=\omega_p}. \tag{C.1.21}$$

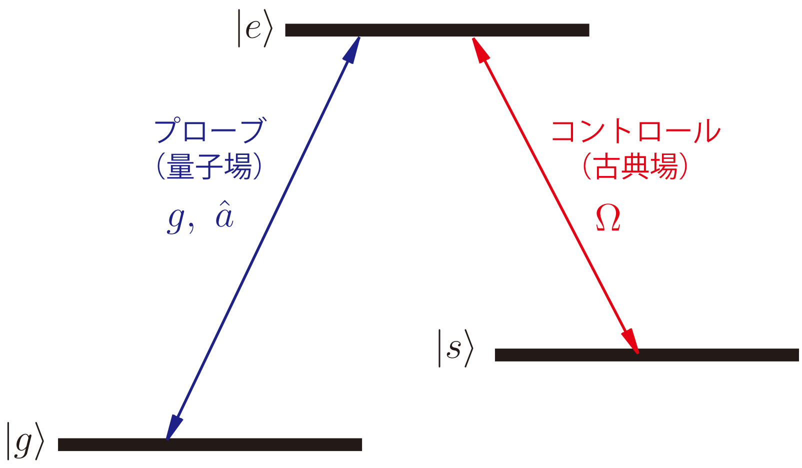

図 C.3　Λ 型 3 準位系.

図 C.2 に示されているように，EIT ではコントロール光を小さくすること $(\Omega_c \to +0)$ で屈折率の傾きをいくらでも大きくできる $(\frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}\omega} \to \infty)$．式 (C.1.21) によればこの極限で光パルスの群速度が 0 になるが，光が停止するという帰結は奇妙であり受け入れ難い．次節では原子集団と光の複合系を考えることで，同じ極限で何が起きているかを考察する．

C.2　量子メモリ

前節の半古典モデルに対して，プローブ光として単一光子数状態を用いる場合を考える．この場合の適切なモデルは，図 C.3 に示したような，$|g\rangle \leftrightarrow |e\rangle$ 遷移と消滅演算子 $\hat{a}$ で特徴づけられる光場とが定数 g によって結合し，$|s\rangle \leftrightarrow |e\rangle$ 遷移と古典的なコントロール光がラビ周波数 Ω で結合しているものである．この系での相互作用を記述するハミルトニアン $\hat{V}$ は，式 (2.1.11) と同様に[*3]次のように与えられる:

$$\hat{V} = -\left(\hbar g\hat{a}e^{i\phi(\boldsymbol{r})}\sum_{j=1}^{N}|e_j\rangle\langle g_j| + \hbar\Omega e^{i\varphi(\boldsymbol{r})}\sum_{j=1}^{N}|e_j\rangle\langle s_j|\right) + h.c. \tag{C.2.1}$$

N は原子数であり，j は原子集団を構成する各原子に付けられたラベルである．結合定数 g についてはすべての原子で同じ値を取ることが仮定されている．また，$\phi(\boldsymbol{r})$, $\varphi(\boldsymbol{r})$ はそれぞれプローブ，コントロールとして入力される場のモード関数に由来する位相分布である．今，原子集団の初期状態としてすべての原子が準位 $|g\rangle$ にある $|a\rangle \equiv |g_1\rangle \otimes |g_2\rangle \otimes \cdots \otimes |g_N\rangle = |g_1, g_2, \cdots, g_N\rangle$，プローブ場の初期状態として単一光子数状態

[*3] 相互作用ハミルトニアンについて，式 (2.1.11) に対して i 倍されているのは後の便利のためである．ここでは $e^{i\phi(\boldsymbol{r})}$ に適当に押し付けることで式 (2.1.11) との対応がとれる．

$|1\rangle$ を考えよう．複合系の初期状態は $|a\rangle|1\rangle = |a,1\rangle$ である．この状態への $\hat{V}$ の作用を考えると，

$$\begin{aligned}\hat{V}|a,1\rangle &= -\hbar g\sqrt{N}\frac{1}{\sqrt{N}}e^{i\phi(\boldsymbol{r})}\sum_{j=1}^{N}|g_1,g_2,\cdots,g_{j-1},e_j,g_{j+1},\cdots,g_N\rangle\otimes|0\rangle \\ &\equiv -\hbar g\sqrt{N}|b,0\rangle \end{aligned} \tag{C.2.2}$$

を得る．同様に，$|b,0\rangle$ への $\hat{V}$ の作用を考えると，

$$\hat{V}|b,0\rangle = -\hbar g\sqrt{N}|a,1\rangle - \hbar\Omega|c,0\rangle, \tag{C.2.3}$$

$$|c,0\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}}e^{i(\phi(\boldsymbol{r})-\varphi(\boldsymbol{r}))}\sum_{j=1}^{N}|g_1,g_2,\cdots,g_{j-1},s_j,g_{j+1},\cdots,g_N\rangle\otimes|0\rangle \tag{C.2.4}$$

を得る．$|c,0\rangle$ への $\hat{V}$ の作用を考えると次のようになる:

$$\hat{V}|c,0\rangle = -\hbar\Omega|b,0\rangle. \tag{C.2.5}$$

以上から，初期状態 $|a,1\rangle$ からのダイナミクスを考える上では，$\{|a,1\rangle, |b,0\rangle, |c,0\rangle\}$ を基底に用いると都合が良い．各状態への作用から明らかに

$$\hat{V} = -\hbar\left(g\sqrt{N}|a,1\rangle\langle b,0| + \Omega|c,0\rangle\langle b,0|\right) + h.c. \tag{C.2.6}$$

と書ける．$\hat{V}$ は半古典論で考察した式 (C.1.1) と形式的に同じであるから，固有値 0 に属して $|b,0\rangle$ への励起確率が 0 であるような固有状態 $|\psi\rangle = g\sqrt{N}|a,1\rangle - \Omega(t)|c,0\rangle$ が存在し，規格化まで考慮すると次のように書ける:

$$|\psi\rangle = \cos\theta(t)|a,1\rangle - \sin\theta(t)|c,0\rangle, \tag{C.2.7}$$

$$\theta(t) = \arctan\left(\frac{g\sqrt{N}}{\Omega(t)}\right). \tag{C.2.8}$$

これは半古典論で説明した暗状態に相当する．断熱的に θ を 0 から $\pi/2$ の間で変化させることは，コントロール光のラビ周波数を制御することで実現できる．すなわち，コントロール光の強度を変えることで可逆に光子的な状態 $|a,1\rangle$ と原子的な状態 $|c,0\rangle$ とを行き来することができ，原子集団は量子メモリとして機能していると言える．

電磁誘起透明化媒質中で群速度の遅延が発生するのは，コントロール光の強度が小さい（ラビ周波数が小さい）状況では θ が $\pi/2$ に近いため，$|\psi\rangle$ が原子的な $|b,0\rangle$ に近い状態にあるためである．このとき，原子と光子とが結合した準粒子（ポラリトン）が自由に運動すると見なすことができて，コントロール光を弱くすることで結合が強まるとともにポラリトンは重くなり，低速で伝播するようになる．コントロール光の強度が小さい極限

では，$|\psi\rangle \to |c,0\rangle$ である．この状態は，式 (C.2.3) に示されているように，単一の励起であるにも関わらず，準位 $|g\rangle$，$|s\rangle$ 間にすべての原子にわたるコヒーレンスがある状態である．

ところで状態 $|c,0\rangle$ は，原子集団と光の集団相互作用によって確率的に生成される状態 (2.3.9) と完全に一致している．このことは，式 (2.3.9) の状態にある原子集団に対してコントロール光に相当するレーザーパルス*4を照射することで，上記の議論とまったく同様にして，原子集団の状態を光子の状態へと転写できることを意味する．

また，本節では簡単のために本論文に関係する単一光子数状態だけを光の状態に選んだが，ここでの議論は n 光子数状態にも拡張できて，n 光子数状態に対応する集団励起状態が存在する [28]．これは，原子集団を構成する原子数が十分に大きい場合，様々な光子数状態の重ね合わせ—換言すれば量子的なもの含めた任意の光—に対して原子集団を量子メモリとして機能させられることを意味する．

C.3　実験

付録 C.1 で導入したような，原子に対する古典的なプローブ光の応答をコントロール光によって制御した実験の概略を示す．

C.3.1　電磁誘起透明化

レーザー冷却された ^{87}Rb 原子集団を準備し，図 C.1 中の $|g\rangle$，$|s\rangle$，$|e\rangle$ として，$5S_{1/2}F=1$，$5S_{1/2}F=2$，$5P_{1/2}F=2$ を利用した．すなわち，プローブ光として $5S_{1/2}F=1 \to 5P_{1/2}F=2$ から可変な離調 Δ を取った光を入射し，コントロール光として $5S_{1/2}F=2 \to 5P_{1/2}F=2$ に共鳴の光を入射した．2 つの光の相対的な周波数は付録 G.1.4 に示されている手法で制御されており，プローブ光の光源は外部共振器付き半導体レーザー，コントロール光の光源はチタンサファイヤレーザーである．実験のタイムシーケンスと模式図を図 C.4 に示した．

プローブ光とコントロール光は原子集団の位置で 3 度の角度で交差するように調整され，プローブ光は原子集団の位置で半径 $210\,\mu$m の焦点を結び，コントロール光はビーム半径 1 mm でコリメートされている．また，両者の偏光は σ^+ 円偏光とした．様々な強度のコントロール光とともに原子集団に入射されたプローブ光の透過率を，周波数掃引しながら測定した結果を図 C.5 に示す．

表示されている周波数領域は $5S_{1/2}F=1 \to 5P_{1/2}F=2$ 遷移から ± 800 kHz 程度の

*4 実験では read pulse と呼んでいる．

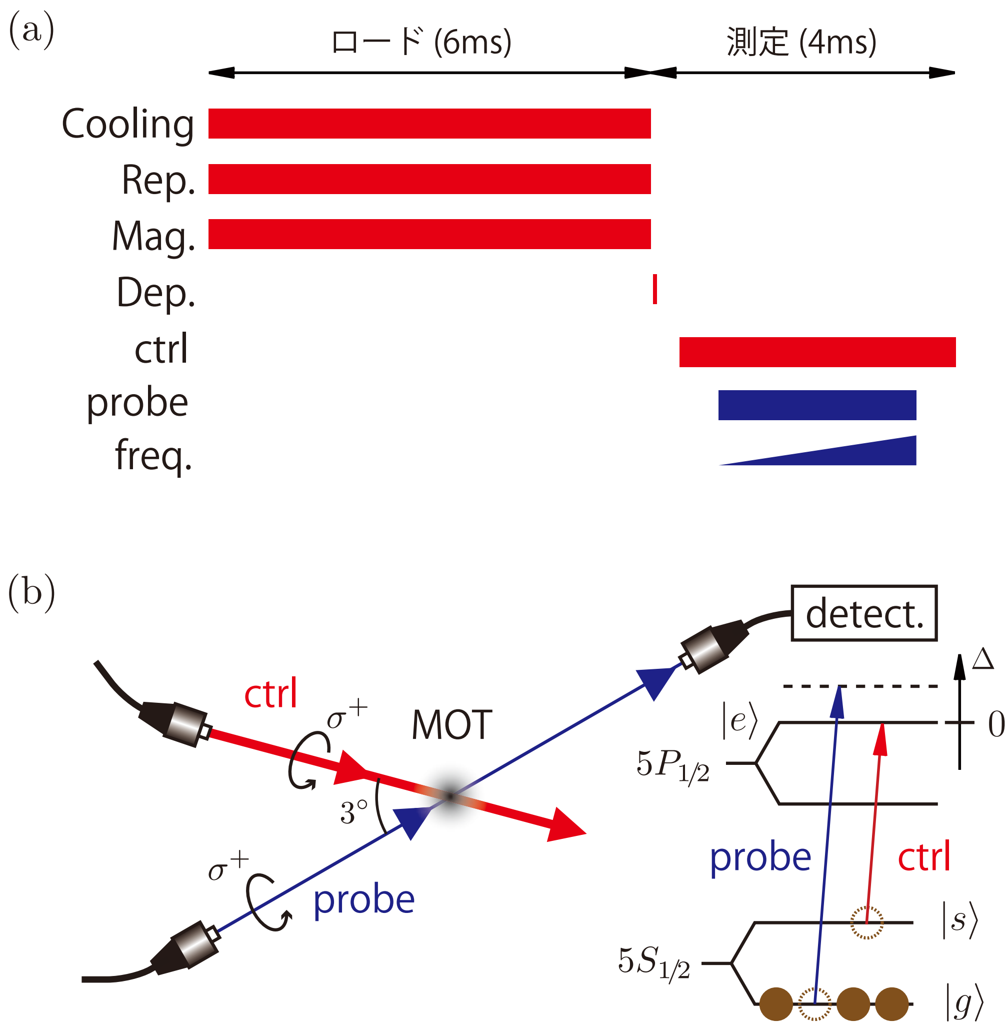

図 C.4　実験の模式図．(a) 実験のタイムシーケンス．ロード時間は実験 III,IV のそれと同様である．測定時間においては，$5S_{1/2}F = 2 \to 5P_{1/2}F = 2$ に共鳴のコントロール光 (Ctrl) を入射した上で，$5S_{1/2}F = 1 \to 5P_{1/2}F = 2$ に近共鳴のプローブ光 (probe) を周波数掃引を行いながら入射した．(b) 実験装置の模式図．冷却原子集団 (MOT) の位置で 3 度の角度で交差するように σ^+ 偏光の probe, Ctrl を入射し，probe の光強度を測定した．

範囲[*5]であり，コントロール光の強度が $0\,\mu$W である場合には表示範囲内の到る所で殆どすべてのプローブ光が吸収され，透過率は離調に対して 0 付近でフラットな振る舞いを示している．コントロール光の強度が 0 でない時には，プローブ光の共鳴付近で吸収の消失が起きており，これが電磁誘起透明化である．透明領域の幅はコントロール光の強度に依存し，図 C.2 で予想されていたように，コントロール光の強度が小さくなるにつれて狭くなる．コントロール光強度 $50\,\mu$W の透明領域の半値全幅は 100 kHz 程度であるが，こ

[*5] $5S_{1/2}F = 1 \to 5P_{1/2}F = 2$ の自然幅は 6 MHz 程度である．

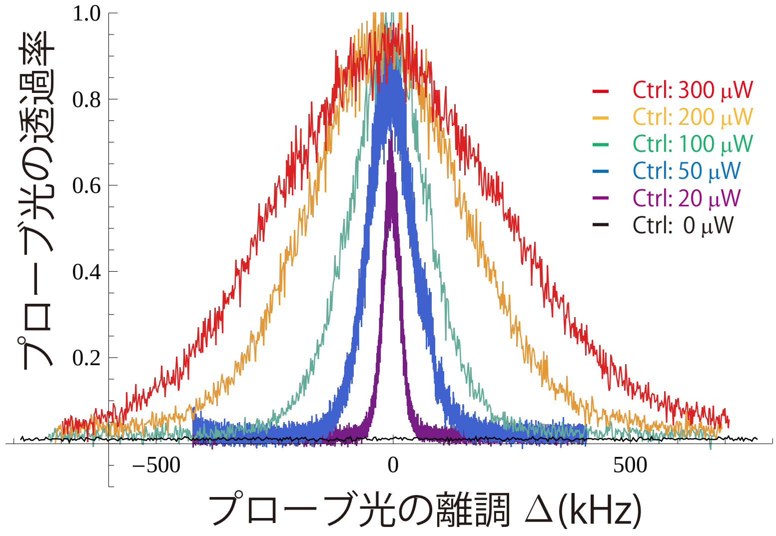

図 C.5　電磁誘起透明化の測定結果.

れ以下のコントロール光強度に対して透過率の最大値が減少するのは，コントロール光，プローブ光のそれぞれが透明領域と同程度の周波数幅を持つことの結果であると予想される[*6].

C.3.2　光パルスの群速度の遅延と保存・再生

図 C.2 に示されているように，電磁誘起透明化が起こっている領域での屈折率分散は鋭い正常分散を示し，原子集団を透過する光パルスの群速度が低下することが期待される．また，付録 C.2 で議論されているように，コントロール光強度が小さい極限では状態が光から原子集団に移され，その原子集団に再度コントロール光を照射することで再び光に戻すことが可能であることも期待される．

前節 C.3.1 に示した実験では，プローブ光とコントロール光の強度はプローブ光の周波数掃引が行われた測定時間内でそれぞれ一定であった．ここでは，$5S_{1/2}F = 1 \to 5P_{1/2}F = 2$ に共鳴，すなわち前節の離調 $\Delta = 0$ のプローブ光を，強度の $1/e$ 値の半幅 $\tau = 2.2\,\mu\mathrm{s}$ のガウシアンパルス

$$U(t) = N_0 \cdot \exp\left(-\frac{(t-t_0)^2}{\tau^2}\right) \tag{C.3.1}$$

[*6] チタンサファイヤレーザーの線幅（ローレンツ関数の半値半幅）は 50 kHz 程度であり，これに対して相対周波数制御された半導体レーザーの線幅も同じ程度であることが期待される．コントロール光強度を下げれば下げるほど狭い透明化領域を示すことが予想されるが，プローブの精度と見たい構造の細かさが同程度になってしまうために図 C.5 のような振る舞いを示すと予想される．

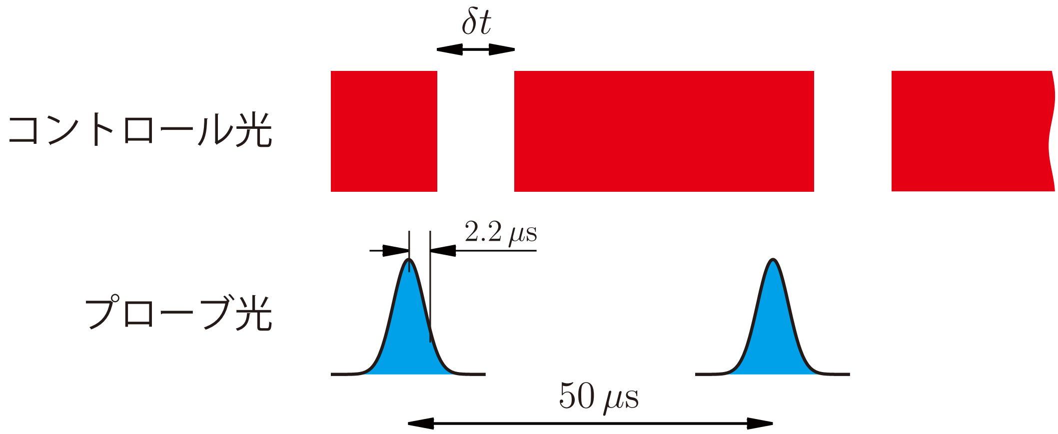

図 C.6　電磁誘起透明化に基づく量子メモリのためのタイムシーケンス．強度の $1/e$ 値の半幅 $\tau = 2.2\,\mu$s のガウシアンパルスであるプローブ光が 50 μs 周期で原子集団に入射される．コントロール光は，低速伝播している光パルスの一部が原子集団中にある瞬間から可変な δt だけ強度がゼロにされ，それ以外では 75 μW である．

に整形して原子集団に入射し，パルスの伝播をコントロール光の強度によって制御した実験について示す．

付録 C.3.1 の実験からの相違点は，プローブ光の離調が常にゼロであることと，図 C.6 に示された測定時間中のプローブ光，コントロール光のタイムシーケンスである．また，コントロール光の強度を 75 μW に固定した．

コントロール光の強度がゼロとなる時間 δt が，光の情報*7が原子集団に留め置かれる「保存時間」に相当する．保存時間においては原子集団中でのなんらかのデコヒーレンスが影響することが予想され，その影響を再生確率の低下として観察することが本実験の目的である．

$\delta t = 0$，5 μs，原子集団が無い場合のそれぞれで，プローブ光の時間波形を測定した結果を図 C.7 に示す．なお，グラフの縦軸は各時刻における光強度を「原子集団が無い場合」で規格化したものである．

まず，原子集団が無い場合の，すなわち入力されたプローブ光の時間波形（黒）と，$\delta t = 0\,\mu$s の場合の，すなわち電磁誘起透明化媒体を通過してきたプローブ光の時間波形

*7 この実験で保存・再生される対象は光パルスの時間波形と空間モードであり，古典的な側面しか取り扱っていない．

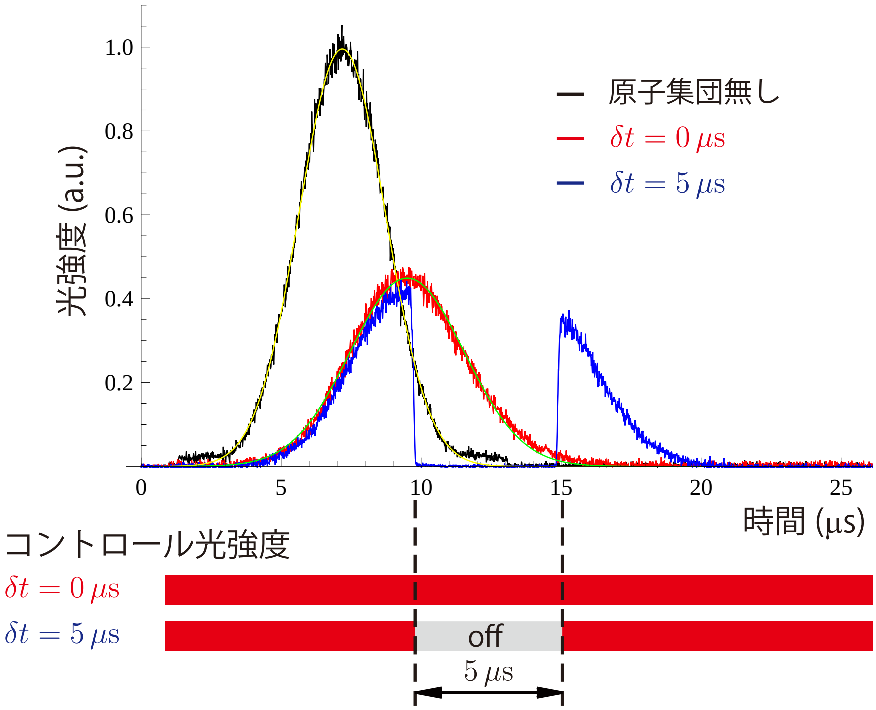

図 C.7　電磁誘起透明化に基づく量子メモリの実験結果．$\delta t = 0\,\mu\mathrm{s}$ のプローブ光の時間波形（赤）は，原子集団が無い場合の時間波形（黒）と比較して，電磁誘起透明化による低速度伝播の結果として遅延している．$\delta t = 5\,\mu\mathrm{s}$ の時間波形（青）は，コントロール光が遮断されタイミングでゼロとなった（保存された）後，コントロール光が再度照射されたタイミングで，保存時に切り取られた部分と同様の波形で再生されている．

（赤）の差異について考える．それぞれの時間波形を式 (C.3.1) でフィッティングすると，

$$\text{黒:}\ 1.0\cdot\exp\left[\quad\left(\frac{t\quad 7.2\,[\mu\mathrm{s}]}{2.2\,[\mu\mathrm{s}]}\right)^2\right], \tag{C.3.2}$$

$$\text{赤:}\ 0.45\cdot\exp\left[\quad\left(\frac{t\quad 9.5\,[\mu\mathrm{s}]}{2.9\,[\mu\mathrm{s}]}\right)^2\right], \tag{C.3.3}$$

が得られた．なお，これらの関数も測定されたデータに重ねて図 C.7 中に表示されている．波形のピークは 45 % に低下し，時間幅（標準偏差）は $2.2\,\mu\mathrm{s}$ から $2.9\,\mu\mathrm{s}$ に増大している．これらは，電磁誘起透明化媒体がバンドパスフィルターとして図 C.5 にも示されているように周波数選択的に機能していることと，分散媒質中での光の群速度 (C.1.21) が周波数に依存することの結果である．

原子集団を用いた光パルスの保存・再生が有効に機能するのは，コントロール光が遮断されたタイミングで原子集団と重なった空間領域に存在する光パルスである．パルスの時間幅を τ とすると，これに対応する空間的な幅はパルスの群速度を v_g として $d = v_g\tau$ で与えられる．原子集団の長さを L とすると，パルス中で保存・再生が可能な割合は

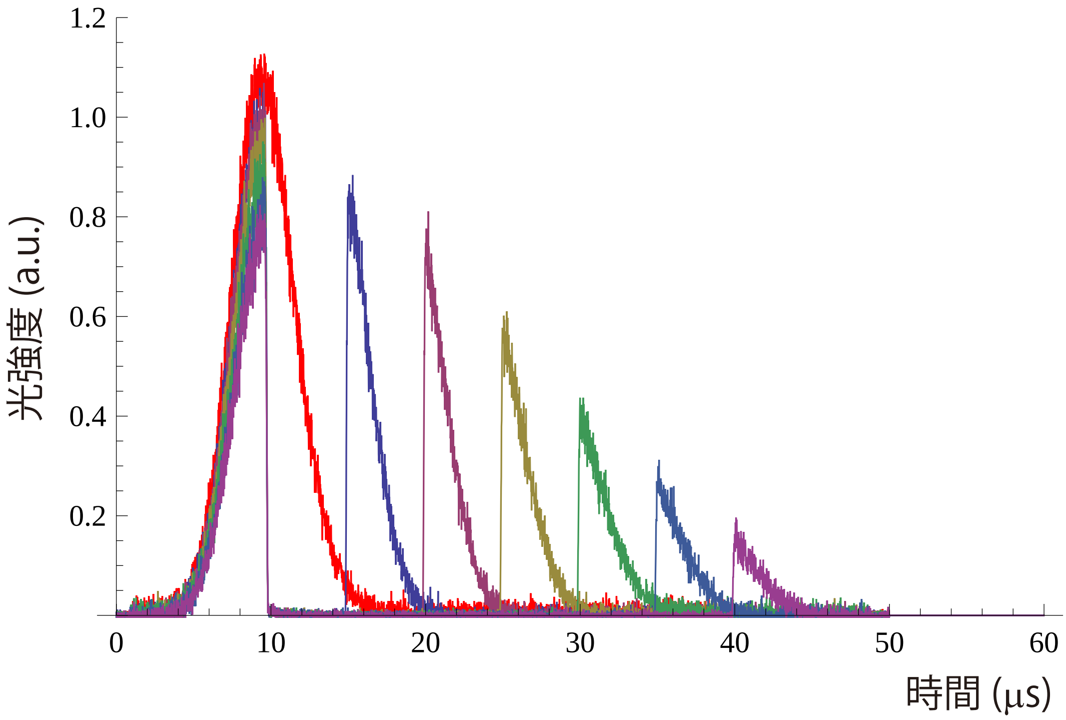

図 C.8　電磁誘起透明化に基づく量子メモリの実験結果．図 C.5 と同様に，透過光強度が消失している時間帯が保存時間にあたる．

$L/d = L/v_g/\tau$ で与えられる．一方で，電磁誘起透明化によって群速度 v_g が光速より十分小さいとみなせる場合，パルスの遅延時間 δ を用いて群速度は $v_g \approx L/\delta$ で良く近似できる．したがって $L/d \approx \delta/\tau$ で成り立ち，入力パルスのうちで，遅延時間と同程度の時間幅が保存・再生可能な部分となる．式 (C.3.2) によれば，遅延時間 $\delta = 9.5 - 7.2 = 2.3\,\mu$s であった．したがって，本実験の条件ではこの程度の時間領域，すなわちパルスの 50％ 程度がある瞬間に原子集団と重なっており，保存再生可能な部分であると言える．そこで本実験では，後半の 50% が保存されるタイミングでコントロール光を遮断した．[*8]

保存時間 δt を様々に変えて，プローブ光パルスの時間波形を測定した結果を図 C.8 に示す．グラフの縦軸は，$\delta t = 0$ のピーク強度で規格化された光強度である．再生確率が $1/e$ まで低下する時間 (コヒーレンス時間) は 20 μs であった．

原子集団中でのデコヒーレンスの要因の中で，この時間スケールで影響を及ぼすことが予想されるものは，原子集団を構成する個々の原子の乱雑な運動である．本実験では，プローブ光，コントロール光それぞれの光軸間に 3° の角度差が設けられており，原子集

[*8] パルスの前半を保存しようとした場合，後に続く光はコントロール光が無い状況で原子集団に照射されることになり，不要なデコヒーレンスの要因になることが懸念される．また，経験的にではあるが，コントロール光の on-off を瞬間的に行う場合，遅延したパルスのピーク位置でコントロール光を off にすることで再生効率が最適化されるようである．より進んだ最適化については文献 [98] で詳細に論じられている．

団には両者の位相差に相当する，周期 10 μm 程度の屈折率グレーティングが刻まれる．140 μK 程度まで冷却された ^{87}Rb 原子の速度は 10 cm/s 程度であるから，この原子が屈折率グレーティングの 1 周期分進むのに必要な時間は 100 μs 程度となる．原子の運動によって周期構造が乱された場合，少なくともプローブ光と同じ空間モードに光が再生される確率は低下すると予想される．

この推察は，室温の原子集団を用いて角度差をつけずに行われた実験 [98] における 500 μs に及ぶコヒーレンス時間や，屈折率グレーティングに対応した空間周期の 1 次元光格子を援用した実験 [66] の報告にも合致するものである．

付録 D

軌道角運動量に感度を持った光子検出

D.1　位相変調による位相特異点の操作

図 A.1∼A.6 を見れば明らかなように，通常よく用いられるガウシアンモード $\mathrm{LG_{00}}$ と比較した場合の $\mathrm{LG_{0m}}$ の特徴は，ドーナツ状の強度分布と光軸上に存在する位相特異点である．m 次の位相特異点を光軸上に付加されたガウシアンビームの強度分布は，ガウシアンビーム $\mathrm{LG_{00}}$ の強度分布からドーナツ状の $\mathrm{LG_{0m}}$ の強度分布へと伝播に伴って変化し，その後 $\mathrm{LG_{0m}}$ のモードで安定して伝播するようになる．すなわち，ガウシアンビームに (から) 位相特異点を付加 (除去) することで LG ビームの次数 m を変化させることが可能で，これは，光の軌道角運動量を位相変調によって操作できることを意味する．

ビームに位相特異点を付加する手段としては，螺旋状に厚みが変化するスパイラルフェイズプレートを用いる手法がある．スパイラルフェイズプレートは図 A.1 や図 A.2 の位相分布と同様の位相構造を持つ板であり，この板を透過または反射したビームには所望の位相分布 $\Phi_{\mathrm{mod}} = m\phi$ が付加される．通常よく用いられる半波長板の厚みを考えれば明らかなように，このような螺旋状の構造，特に位相特異点を完全に再現するためには無限大の工作精度が必要となり，現実的ではない．加えて，変調されたビームと変調されなかったビームが同軸にあるため，これらの分離が困難である点が問題となる．

本研究で用いた手法は，オフアクシスホログラムにより位相特異点を付加する手法である．この手法では，反射 (透過) ビームに $\Phi_{\mathrm{mod}} = m\theta - kx\sin\alpha$ という位相差を与える．ここで，k は光の波数であり，変調された光ビームは x 方向に角度 α だけ傾いて伝播する．一方で，変調されなかった成分は角度を変えずに伝播するため，これを除去することができる．この位相差を $[0, 2\pi]$ で折りたたみ，位相変調成分として記録したものをブ

レーズ状位相ホログラムと呼ぶ．位相変調成分 Φ_{braze} は，

$$\Phi_{\mathrm{braze}} \equiv \Phi_{\mathrm{mod}} \pmod{2\pi}$$

で与えられる．$m = 0$ であれば通常のブレーズド回折格子そのものである．$m \neq 0$ の場合であっても，中心に分岐を持つ点を除けば通常のブレーズド回折格子と同じ構造を持つ．$m = 1$ とした場合の位相変調パターンを図 D.1 に示す．

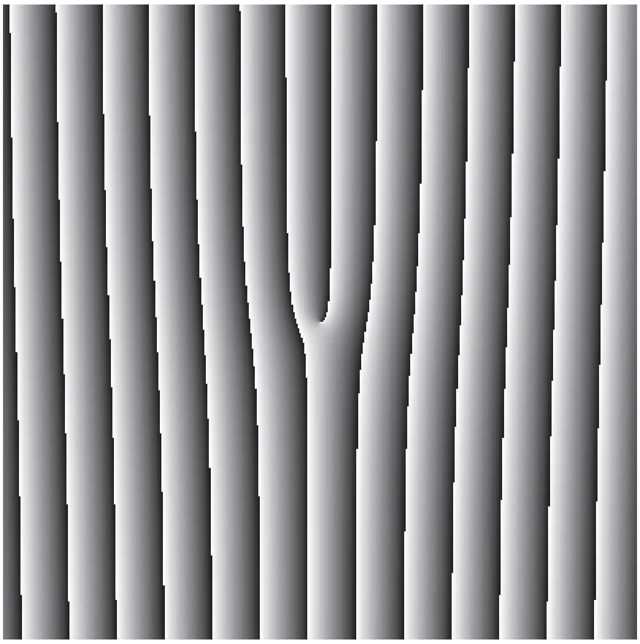

図 D.1　位相特異点を付加するオフアクシスホログラムのパターン．$\Phi_{\mathrm{braze}} = [\Phi_{\mathrm{mod}}, 2\pi]$

D.2　位相変調による基底変換の概略

D.1 で述べたように，光軸上に位相特異点を付加することで $\mathrm{LG}_{00} \leftrightarrow \mathrm{LG}_{01}$ の変換が可能である．これを用いれば，LG_{00} の光子のみを選択的に透過させる単一モードファイバーを併用することで LG_{00} または LG_{01} の光子のみを選択的に検出することが可能となる．しかし，量子トモグラフィーを行うためには，例えば LG_{00} と LG_{01} とを重ね合わせたモードの光子をに対しても同様に測定できる必要がある，本節ではその方法を示す．

今，LG_{00} と LG_{01} とを $e^{i\phi}$ の位相差をつけて，適当な比率 γ で重ね合わせたビームを考える．このビームの空間モードは

$$U = \mathrm{LG}_{00} + \gamma e^{i\phi} \mathrm{LG}_{01} \tag{D.2.1}$$

で与えられる．$\gamma = 1$，$\phi = 0, \dfrac{\pi}{2}, \pi, 2\pi$ の各場合に対して計算された U の強度分布と位相分布を図 D.3 に示す．なお，強度分布中に付した十字は位相特異点の位置に対応して

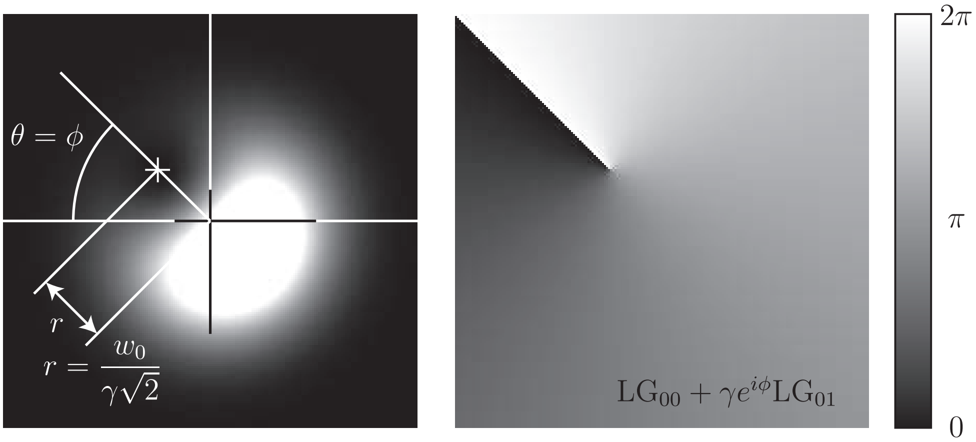

図 D.2　重ね合わせた LG ビームにおける位相特異点の位置

いる．縦軸，横軸ともに，ビーム半径 w_0 に対して $[-2w_0, 2w_0]$ の範囲でプロットされている．

重ね合わせたビームの特異点は光軸からずれており，同じ位相ホログラムの特異点を光軸からシフトさせることで $\mathrm{LG}_{00} \leftrightarrow U = \mathrm{LG}_{00} + \gamma e^{i\phi}\mathrm{LG}_{01}$ の変換が可能であるとわかる．

なお，図 D.2 に示すように，$\mathrm{LG}_{00} + \gamma e^{i\phi}\mathrm{LG}_{01}$ の位相特異点の座標は光軸上の点を中心とした極座標系で次のように表される [99].

$$r = \frac{w_0}{\gamma\sqrt{2}}, \quad \theta = \phi. \tag{D.2.2}$$

D.3　空間的位相変調の数学的取り扱い

D.1 で述べたオフアクシスホログラムの位相変調は，次のように表現できる:

$$\Phi_{\mathrm{mod}} = \Delta\varphi - k\,(\sin\alpha)\,x, \tag{D.3.1}$$

ここで，α は成す角．$\Delta\varphi$ は入出力光の位相差．$k = 2\pi/\lambda$．λ は波長である．これを $[0, 2\pi)$ で折りたたむと次式を得る．

$$\begin{aligned}\Phi_{\mathrm{braze}} &= \mathrm{Mod}\left[\Delta\varphi - k\,(\sin\alpha)\,x, 2\pi\right] \\ &= \mathrm{Mod}\left[\Delta\varphi - \frac{2\pi}{\Lambda}x, 2\pi\right],\end{aligned} \tag{D.3.2}$$

ここで，$\Lambda = \lambda/\sin\alpha$ は回折格子の波長である．

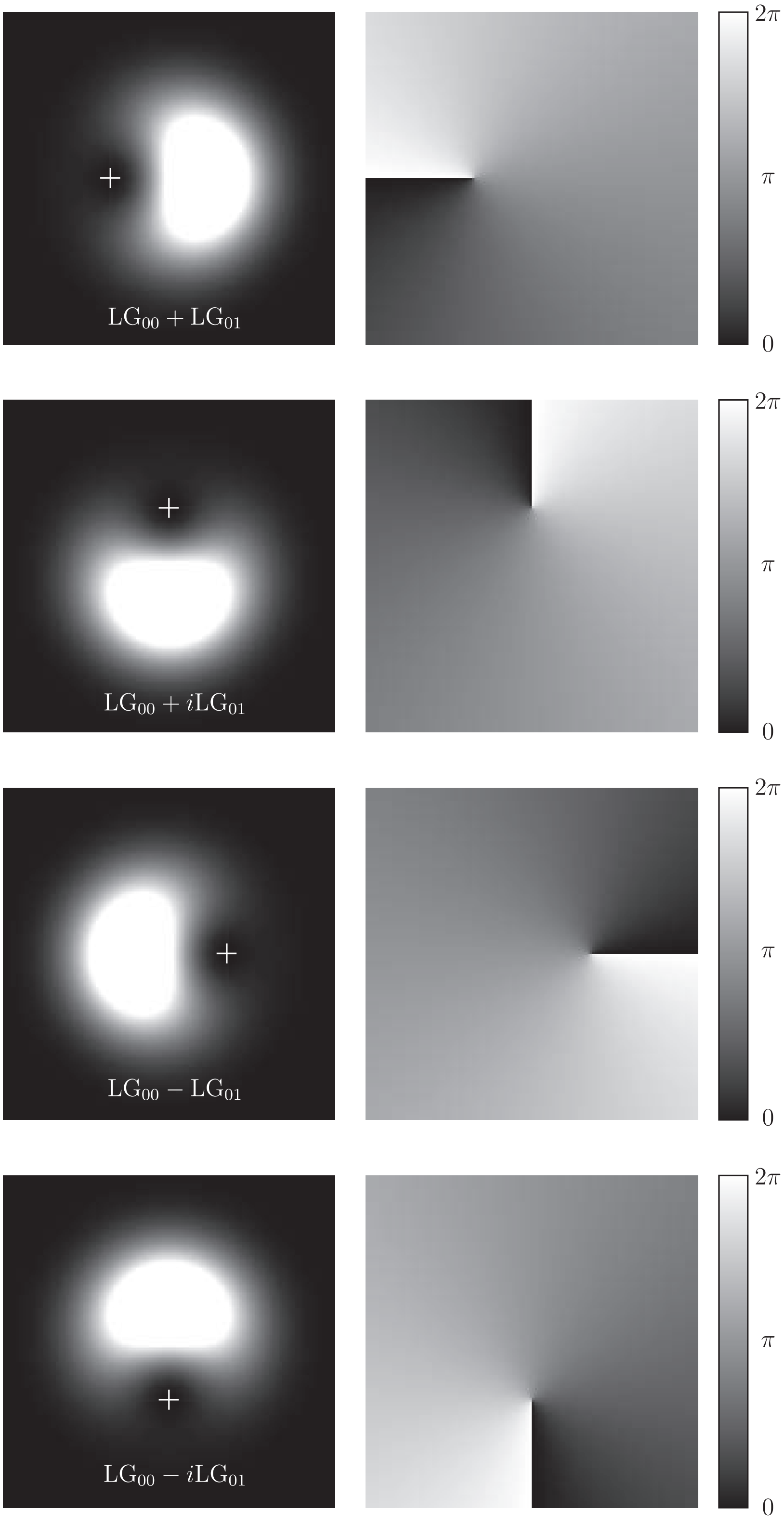

図 D.3　$U=\mathrm{LG}_{00}+\gamma e^{i\phi}\mathrm{LG}_{01}$ の強度分布と位相分布．縦軸，横軸ともに，プロット範囲はビーム半径 w_0 に対して $[-2w_0, 2w_0]$．ビームの伝播方向は紙面に対して上向きである．

N 段階に離散化された位相ホログラムの透過関数 $T_N(x)$ は次の式で与えられる．

$$T_N(x) = \exp\left(-i\frac{tl}{N}\right),\ \left(\frac{l\Lambda}{N} \le \mathrm{Mod}[x,\Lambda] < \frac{(l+1)\Lambda}{N}\right),\ (0 \le l \le N-1), \tag{D.3.3}$$

ここで，t を最大の位相変調量に関するパラメータとして導入した．$T_N(x)$ は周期 Λ の周期関数だからフーリエ変換の形式で表現できて，

$$T_N(x) = \sum_{s=-\infty}^{\infty} A_N(s)\exp\left(\frac{i2\pi sx}{\Lambda}\right), \tag{D.3.4}$$

$$A_N(s) = \frac{1}{\Lambda}\int_0^{\Lambda} \mathrm{d}x T_N(x)\exp\left(-\frac{i2\pi sx}{\Lambda}\right). \tag{D.3.5}$$

ただし，$A_N(s)$ は $-s$ 次の回折光の複素振幅に対応しているものとする*1．$A_N(s)$ を変形していくと次式を得る:

$$\begin{aligned}
A_N(s) &= \frac{1}{\Lambda}\int_0^{\Lambda} \mathrm{d}x T_N(x)\exp\left(-\frac{i2\pi sx}{\Lambda}\right) \\
&= \frac{1}{\Lambda}\int_0^{\Lambda} \mathrm{d}x \exp\left(-i\frac{tl}{N}\right)\exp\left(-\frac{i2\pi sx}{\Lambda}\right) && \text{(D.3.6)} \\
&= \sum_{l=0}^{N-1}\exp\left(-i\frac{t+2\pi s}{N}l\right)\frac{1}{\Lambda}\int_0^{\Lambda/N}\mathrm{d}x\exp\left(-\frac{i2\pi sx}{\Lambda}\right). && \text{(D.3.7)}
\end{aligned}$$

式 (D.3.6) の積分は N 段階のホログラム全体で積分する形式になっているが，式 (D.3.7) では，離散化されていることを利用して，一定の位相変調を加える部分を積分から取り出している．残った積分は簡単に計算できて，次の式を得る:

$$\begin{aligned}
A_N(s) &= \sum_{l=0}^{N-1}\exp\left(-i\frac{t+2\pi s}{N}l\right)\frac{i}{2\pi s}\left\{\exp\left(-\frac{i2\pi s}{N}\right)-1\right\} \\
&= \sum_{l=0}^{N-1}\exp\left(-i\frac{t+2\pi s}{N}l\right)\frac{1}{\pi s}\sin\left(\frac{\pi s}{N}\right)\exp\left(-\frac{i\pi s}{N}\right) \\
&= \frac{1}{N}\sum_{l=0}^{N-1}\exp\left(-i\frac{t+2\pi s}{N}l\right)\frac{N}{\pi s}\sin\left(\frac{\pi s}{N}\right)\exp\left(-\frac{i\pi s}{N}\right) \\
&= \frac{1}{N}\sum_{l=0}^{N-1}\exp\left(-i\frac{t+2\pi s}{N}l\right)\mathrm{sinc}\left(\frac{s}{N}\right)\exp\left(-\frac{i\pi s}{N}\right).
\end{aligned}$$

ここで，次の式が成り立つことを利用した．

$$e^{-2i\alpha} - 1 = e^{-i\alpha}\left(e^{-i\alpha} - e^{i\alpha}\right) = -2ie^{-i\alpha}\sin\alpha. \tag{D.3.8}$$

*1 この定義は後の便利のため．

以上から，1 次回折光の強度 $I(1) = |A_N(-1)|^2$ は次のように書ける．

$$I(1) = \left| \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} \exp\left(-i \frac{t-2\pi}{N} l \right) \right|^2 \mathrm{sinc}^2\left(\frac{1}{N}\right). \tag{D.3.9}$$

したがって，任意の N に対して $t = 2\pi$ のとき $I_N(1)$ は最大となる．例えば，$N = 4$ とすると $I_4(1) \sim 0.81$ である．N が有限であることに起因する位相変調の不完全さは回折効率の低下として寄与し，その影響が不要なモードの 1 次回折光への混入として及ぼされることはない．また，$t = 2\pi$ のもとで $N \to \infty$ の極限をとると $I_\infty(1) = 1$ となることもわかり，これは理想的なブレーズドホログラムの場合に 1 次回折に全エネルギーが集まることを意味している．

D.4　位相変調を行う光学素子

ここまでで述べたような位相変調を行うためには，位相変調量を光路長に書き直し，光路長が周期的に空間変化する光学素子を作成する必要があり，光の波長に対して十分な工作精度が要求される．このような微細加工は，電子ビーム露光装置を用いることで可能となる．第 4 章で示した実験では，電気通信大学情報通信工学科武田研究室に作成を依頼し，提供していただいた素子を利用した．一方で，最近の高解像度液晶の開発に伴い普及し始めた，液晶を用いた制御可能な空間的位相変調器 (Spatial light modulator, Programable phase modulator) を利用することでも所望の位相変調を実現できる．第 6 章で示した実験では，浜松ホトニクス製プログラマブル位相変調ユニット X8267 を利用した．これは，20mm × 20mm 中の 768px × 768px の各画素で，最大 2.2π の位相シフトを 256 階調で制御できる装置である．本節では，この空間的位相変調器に関する基礎データを得るための予備実験についてまとめる．

D.4.1　位相変調量

モデル

入射光の偏波状態は

$$\begin{pmatrix} V_H \\ V_V \end{pmatrix} \tag{D.4.1}$$

で与えられる．ただし，V_H と V_V はそれぞれ横 (水平) 偏光，縦 (垂直) 偏光成分の複素振幅である．

これを，信号レベル g に依存した位相変調量 $\delta(g)$ を受ける方向 (遅軸) 成分の複素振幅 V_s，信号に依存しない位相遅れを受ける方向 (速軸) 成分の複素振幅 V_f とに分解する必要

があって，この分解は回転行列による座標変換

$$\begin{pmatrix} V_s \\ V_f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi \\ -\sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_H \\ V_V \end{pmatrix} \equiv \mathrm{R}(\phi) \begin{pmatrix} V_H \\ V_V \end{pmatrix} \tag{D.4.2}$$

で与えられる．ここで，ϕ は水平方向と遅軸との成す角である．

液晶を通った反射光の偏波状態は，

$$\begin{pmatrix} V_s' \\ V_f' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-i\delta(g)} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_s \\ V_f \end{pmatrix} \equiv \mathrm{W}_0(\delta) \begin{pmatrix} V_s \\ V_f \end{pmatrix} \tag{D.4.3}$$

で与えられる．

座標軸を水平・垂直方向に戻せば，液晶による変調を受けた反射光の偏波状態は

$$\begin{pmatrix} V_H' \\ V_V' \end{pmatrix} = \mathrm{R}(\phi)^{-1}\mathrm{W}_0(\delta)\mathrm{R}(\phi) \begin{pmatrix} V_H \\ V_V \end{pmatrix} \equiv \mathrm{W}(\delta,\phi) \begin{pmatrix} V_H \\ V_V \end{pmatrix} \tag{D.4.4}$$

であり，ここで

$$\mathrm{W}(\delta,0) = \mathrm{I}^{-1}\mathrm{W}_0(\delta(g))\mathrm{I} = \mathrm{W}_0 = \begin{pmatrix} e^{-i\delta(g)} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{D.4.5}$$

であるから，

$$\begin{pmatrix} V_H' \\ V_V' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-i\delta(g)} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_H \\ V_V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-i\delta(g)} V_H \\ V_V \end{pmatrix} \tag{D.4.6}$$

と書ける．液晶の結晶配向方向を水平にした場合，水平偏光の光を入射すれば $(V_V = 0)$ 全体の位相を $\delta(g)$ だけ遅らせることができることが確認できる．

また，

$$\begin{aligned} \mathrm{W}(\delta,\pi/4) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-i\delta(g)} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} e^{-i\delta}+1 & e^{-i\delta}-1 \\ e^{-i\delta}-1 & e^{-i\delta}+1 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{D.4.7}$$

であるから，液晶の結晶配向方向を水平軸から 45° 傾けた場合の偏波状態は

$$\begin{pmatrix} V_H' \\ V_V' \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} e^{-i\delta}+1 & e^{-i\delta}-1 \\ e^{-i\delta}-1 & e^{-i\delta}+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_H \\ V_V \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} (e^{-i\delta}+1)V_H + (e^{-i\delta}-1)V_V \\ (e^{-i\delta}-1)V_H + (e^{-i\delta}+1)V_V \end{pmatrix} \tag{D.4.8}$$

であり，水平偏光の光を位相変調器に入射したとき $(V_V = 0)$ の反射光について，垂直偏光成分の複素振幅は

$$V_V' = \frac{e^{-i\delta}-1}{2} V_H \tag{D.4.9}$$

で与えられる．したがってこの強度は，

$$I_{\mathrm{V'}} = |V'_V|^2 = \frac{1-\cos\delta}{2} I_{\mathrm{H}} \tag{D.4.10}$$

と計算できて，信号レベル g に対する $I_{\mathrm{V'}}/I_{\mathrm{H}}$ を測定することで位相変調量 δ の信号レベル g に対する特性を求めることができる．

誤差評価

実験を行う上で，液晶の結晶配向方向と水平軸の成す角をちょうど 45° にするのは不可能であるから，誤差について検討しておく．成す角 $\phi = \pi/4 + \Delta$ であるとすると，3 次より高次の微小量を無視する近似で

$$\cos\left(\frac{\pi}{4}+\Delta\right) \sim \cos\frac{\pi}{4} - \Delta\sin\frac{\pi}{4} - \frac{\Delta^2}{2}\cos\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1-\Delta-\frac{\Delta^2}{2})$$
$$\sin\left(\frac{\pi}{4}+\Delta\right) \sim \sin\frac{\pi}{4} + \Delta\cos\frac{\pi}{4} - \frac{\Delta^2}{2}\sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1+\Delta-\frac{\Delta^2}{2})$$

が成り立つから，回転行列は

$$\begin{aligned}
\mathrm{R}\left(\frac{\pi}{4}+\Delta\right) &= \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\pi}{4}+\Delta\right) & \sin\left(\frac{\pi}{4}+\Delta\right) \\ -\sin\left(\frac{\pi}{4}+\Delta\right) & \cos\left(\frac{\pi}{4}+\Delta\right) \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1-\Delta-\frac{\Delta^2}{2} & 1+\Delta-\frac{\Delta^2}{2} \\ -(1+\Delta-\frac{\Delta^2}{2}) & 1-\Delta-\frac{\Delta^2}{2} \end{pmatrix} \\
&= \mathrm{R}_{\frac{\pi}{4}} - \Delta\cdot\mathrm{R}_{\frac{\pi}{4}}^{-1} - \frac{\Delta^2}{2}\cdot\mathrm{R}_{\frac{\pi}{4}}
\end{aligned}$$

となる．ただし，$\mathrm{R}_{\frac{\pi}{4}} \equiv \mathrm{R}\left(\frac{\pi}{4}\right)$ と略記した．このときの式 (D.4.7) は，

$$\begin{aligned}
\mathrm{W}(\delta,\pi/4,\Delta) &= \mathrm{R}^{-1}\left(\frac{\pi}{4}+\Delta\right)\mathrm{W}_0(\delta)\mathrm{R}\left(\frac{\pi}{4}+\Delta\right) \\
&= \left(\mathrm{R}_{\frac{\pi}{4}}^{-1} - \Delta\cdot\mathrm{R}_{\frac{\pi}{4}} - \frac{\Delta^2}{2}\cdot\mathrm{R}_{\frac{\pi}{4}}^{-1}\right)\mathrm{W}_0(\delta)\left(\mathrm{R}_{\frac{\pi}{4}} - \Delta\cdot\mathrm{R}_{\frac{\pi}{4}}^{-1} - \frac{\Delta^2}{2}\cdot\mathrm{R}_{\frac{\pi}{4}}\right) \\
&= \mathrm{R}_{\frac{\pi}{4}}^{-1}\mathrm{W}_0(\delta)\mathrm{R}_{\frac{\pi}{4}} - \Delta\left(\mathrm{R}_{\frac{\pi}{4}}\mathrm{W}_0(\delta)\mathrm{R}_{\frac{\pi}{4}} + \mathrm{R}_{\frac{\pi}{4}}^{-1}\mathrm{W}_0(\delta)\mathrm{R}_{\frac{\pi}{4}}^{-1}\right) \\
&\qquad - \Delta^2\left(\mathrm{R}_{\frac{\pi}{4}}^{-1}\mathrm{W}_0(\delta)\mathrm{R}_{\frac{\pi}{4}} - \mathrm{R}_{\frac{\pi}{4}}\mathrm{W}_0(\delta)\mathrm{R}_{\frac{\pi}{4}}^{-1}\right) + \mathrm{O}(\Delta^3) \\
&= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} e^{-i\delta}+1 & e^{-i\delta}-1 \\ e^{-i\delta}-1 & e^{-i\delta}+1 \end{pmatrix} - \Delta(e^{-i\delta}-1)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\
&\qquad - \Delta^2(e^{-i\delta}-1)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \mathrm{O}(\Delta^3)
\end{aligned} \tag{D.4.11}$$

このように変形される．

水平偏光の光を入射したとき $(V_V = 0)$ の反射光について，垂直偏光 (PBS 反射) 成分の複素振幅は

$$V'_V = \frac{e^{-i\delta} - 1}{2}(1 - 2\Delta^2)V_H + \mathrm{O}(\Delta^3) \tag{D.4.12}$$

で与えられる．対応する強度は，

$$\begin{aligned} I_{\mathrm{V'}} &= |V'_V|^2 \\ &= \frac{1 - \cos\delta}{2}(1 - 4\Delta^2)I_{\mathrm{H}} + \mathrm{O}(\Delta^3) \end{aligned} \tag{D.4.13}$$

となり，例えば $\Delta = 5^\circ \sim 0.087$ 程度ならば，$4\Delta^2 \sim 0.03$ より強度に 3% 程度の誤差が生じる．本実験では，入射光の揺らぎと併せて，5% の強度揺らぎがあるものとして取り扱う．

画素ごとの応答の違いで空間モードが変化することに起因するファイバーカップル効率の変化，PBS の消光比といった要因により，$I_{\mathrm{V'}}/I_{\mathrm{H}}$ は $0 \sim 1$ にならず，ビジビリティーは 1 以下である．そこで，I_{OUT} が最小のときの信号レベルが変調量 0 または 2π に対応し，最大のときの信号レベルが変調量 π に対応すると近似する．つまり，I_{OUT} の最小値が 0 になるようにオフセットを引き，最大値が 1 になるように規格化して特性を求めた．この影響を評価する．

ファイバーカップル効率の変化については無視する．これが入力信号レベルに依存しないという近似は，出力光強度の零点 (変調量 0，2π の 2 箇所) における光強度がほぼ等しかったことから妥当なものである．

最小の光強度を I_{min}，最大の光強度を I_{max} とすると，補正された強度 I^{com} は実際の値 $I_{\mathrm{V'}}$ に対して

$$I^{\mathrm{com}} = \frac{I_{\mathrm{V'}} - I_{\mathrm{min}}}{I_{\mathrm{max}}} = \frac{I_{\mathrm{V'}}}{I_{\mathrm{max}}} - \frac{I_{\mathrm{min}}}{I_{\mathrm{max}}} \tag{D.4.14}$$

で与えられる．今，$I_{\mathrm{max}} = I_{\mathrm{H}}$ と見なす．また，オフセットの影響を q で入れると，$I_{\mathrm{min}} = q \cdot I_{\mathrm{max}}$ で書ける．したがって，

$$I^{\mathrm{com}} = \frac{I_{\mathrm{V'}}}{I_{\mathrm{H}}} - q \tag{D.4.15}$$

式 (D.4.10) の結果を代入すると，

$$I^{\mathrm{com}} = \frac{1 - \cos\delta}{2} - q \tag{D.4.16}$$

と書ける．これを δ について解くと，

$$\delta = \cos^{-1}\left[1 - 2\left(I^{\mathrm{com}} + q\right)\right] \tag{D.4.17}$$

を得る．

I^{com} を $I_{\mathrm{V'}}$ の関数であるとして，式 (D.4.15) を偏微分すると

$$\frac{\partial I^{\mathrm{com}}}{\partial I_{\mathrm{V'}}} = \frac{1}{I_{\mathrm{H}}} = \frac{1}{I_{\mathrm{max}}} \tag{D.4.18}$$

δ を I^{com}，q の関数であるとして，式 (D.4.16) を偏微分すると

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{\partial \delta}{\partial I^{\mathrm{com}}} \frac{1+\sin\delta}{2} \\ 0 &= \frac{\partial \delta}{\partial q} \frac{1+\sin\delta}{2} - 1 \end{aligned}$$

したがって

$$\frac{\partial \delta}{\partial I^{\mathrm{com}}} = \frac{\partial \delta}{\partial q} = \frac{2}{1+\sin\delta} \tag{D.4.19}$$

である．以上から，

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\delta &= \sqrt{\left(\frac{\partial \delta}{\partial I^{\mathrm{com}}} \mathrm{d}I^{\mathrm{com}}\right)^2 + \left(\frac{\partial \delta}{\partial q} \mathrm{d}q\right)^2} \\ &= \frac{2}{1+\sin\delta} \sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}I_{\mathrm{V'}}}{I_{\mathrm{max}}}\right)^2 + (\mathrm{d}q)^2} \end{aligned}$$

が δ に影響する誤差であり，$\mathrm{d}I_{\mathrm{V'}} = I_{\mathrm{V'}} \times 0.05$(5% 程度強度が揺らいでいるので), $\mathrm{d}q = q$(本来は 0 になる値なので) とする．

D.4.2 表面精度

空間光変調器 (Spatial Light Modulator; SLM) の表面精度を測定する．具体的には，SLM で反射させた光 (以下，物体波) を参照波とを混ぜ合わせて作った干渉縞を CCD カメラで撮影し，その画像をフーリエ変換した後，不要信号を取り除いて位相情報を取り出す [100].

物体波，参照波の複素振幅がそれぞれ $U_O(\boldsymbol{r})$，$U_R(\boldsymbol{r})$ で与えられるとすると，干渉縞の強度分布 $I(\boldsymbol{r})$ は次の式で与えられる．ただし，$\boldsymbol{r}$ は物体波断面内の位置ベクトルで，$\boldsymbol{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ である．

$$\begin{aligned} I(\boldsymbol{r}) &= |U_O(\boldsymbol{r}) + U_R(\boldsymbol{r})^2| \\ &= |U_O(\boldsymbol{r})|^2 + |U_R(\boldsymbol{r})|^2 + U_O(\boldsymbol{r}) \cdot U_R^*(\boldsymbol{r}) + U_O^*(\boldsymbol{r}) \cdot U_R(\boldsymbol{r}) \end{aligned} \tag{D.4.20}$$

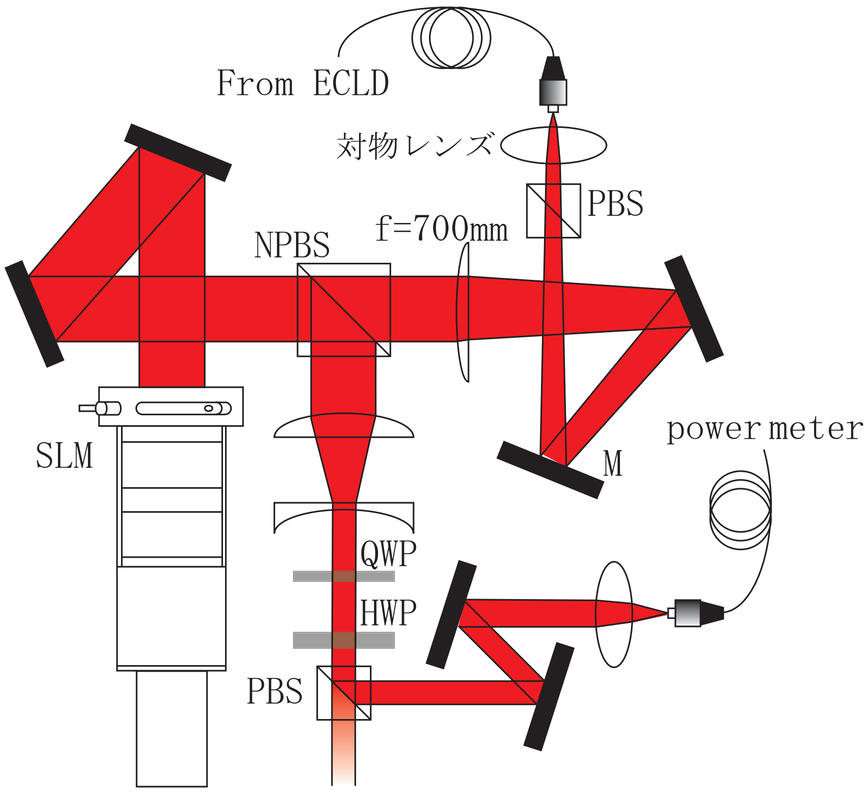

図 D.4　位相変調量を評価するための光学系の模式図．対物レンズから $f = 700$mm の凸レンズまでおよそ 450mm．対物レンズを調整してコリメート．ファイバーに入れる前に適当なビーム径に調整されている．

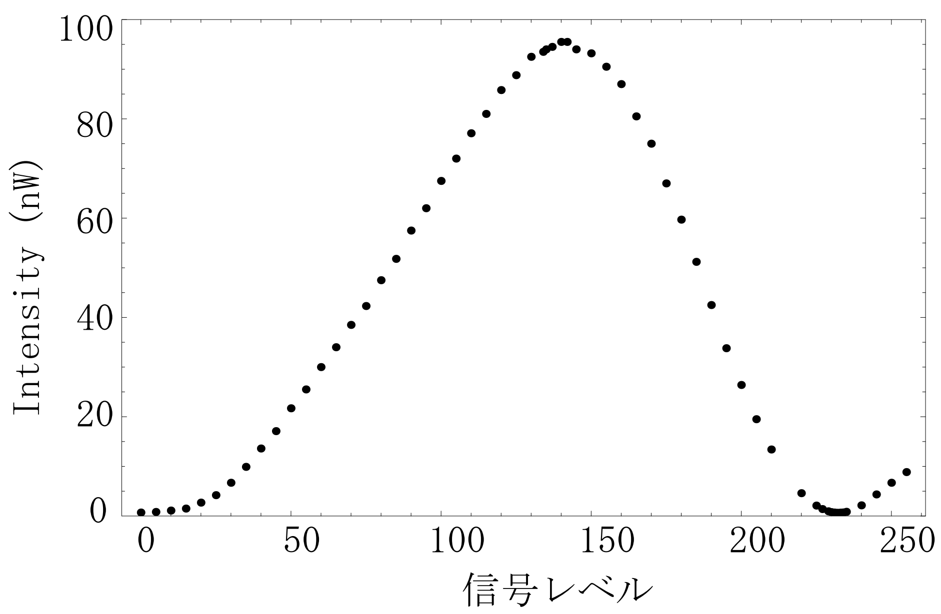

図 D.5　縦偏光の強度と信号レベル

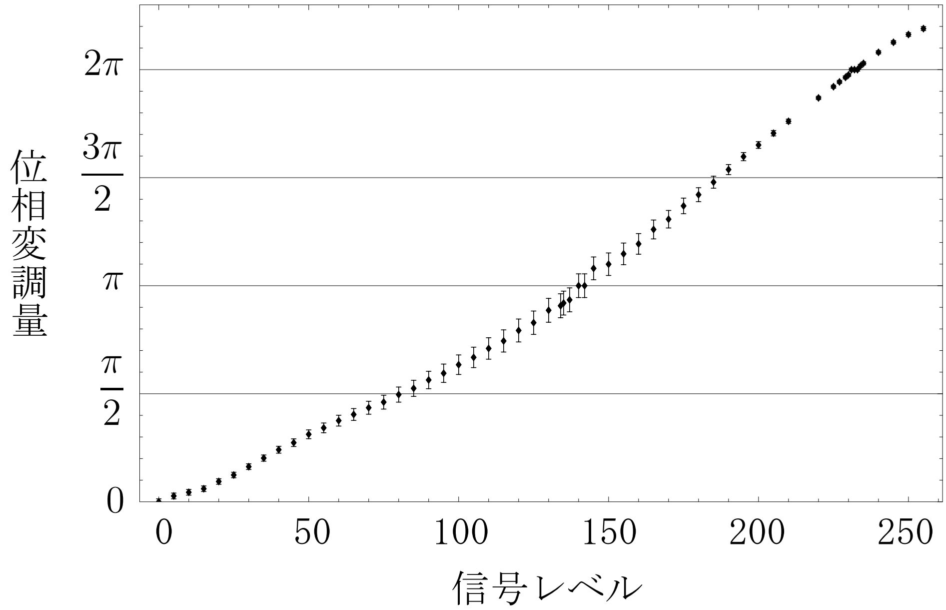

図 D.6　位相変調量と信号レベル

ところで $U_O(\boldsymbol{r})$，$U_R(\boldsymbol{r})$ は，それぞれの位相分布を $\theta_O(\boldsymbol{r})$，$\theta_R(\boldsymbol{r}')$ として，

$$
\begin{aligned}
U_O(\boldsymbol{r}) &= |U_O(\boldsymbol{r})| \exp\Big[i\theta_O(\boldsymbol{r})\Big] \\
U_R(\boldsymbol{r}) &= |U_R(\boldsymbol{r})| \exp\Big[i\theta_R(\boldsymbol{r}')\Big] \\
&= |U_R(\boldsymbol{r})| \exp\Big[i\Big(\theta_R(\boldsymbol{r}) + \boldsymbol{k}_0 \cdot \boldsymbol{r}\Big)\Big]
\end{aligned}
\tag{D.4.21}
$$

で与えられる．$\boldsymbol{k}_0$ は物体波断面内の波数ベクトルで，$\boldsymbol{k}_0 = \begin{pmatrix} k_x \\ k_y \end{pmatrix}$ である．

式 (D.4.21) を式 (D.4.20) に代入すると次式が成り立つ．

$$
\begin{aligned}
I(\boldsymbol{r}) =& |U_O(\boldsymbol{r})|^2 + |U_R(\boldsymbol{r})|^2 \\
&+ |U_O(\boldsymbol{r})| \cdot |U_R(\boldsymbol{r})| e^{i\Delta\theta(\boldsymbol{r})} e^{-i\boldsymbol{k}_0 \cdot \boldsymbol{r}} \\
&+ |U_O(\boldsymbol{r})| \cdot |U_R(\boldsymbol{r})| e^{-i\Delta\theta(\boldsymbol{r})} e^{i\boldsymbol{k}_0 \cdot \boldsymbol{r}}
\end{aligned}
\tag{D.4.22}
$$

$\Delta\theta(\boldsymbol{r}) \equiv \theta_O(\boldsymbol{r}) - \theta_R(\boldsymbol{r})$ であり，最後の 2 項が干渉縞を作る．

理想的なガウシアンモードの光を用いることを想定すると，

$$
|U_O(\boldsymbol{r})| = |U_R(\boldsymbol{r})| = \exp\left(\frac{|\boldsymbol{r}|^2}{\mathrm{w}^2}\right) \tag{D.4.23}
$$

としてよい．光軸上の点を位置座標の原点にしている．w はビーム半径である．このと

き，式 (D.4.22) は次式を用いて簡単に表せる．

$$I(\boldsymbol{r}) = \exp\left(\frac{2|\boldsymbol{r}|^2}{\mathrm{w}^2}\right)\left\{2 + e^{i\Delta\theta(\boldsymbol{r})}e^{-i\boldsymbol{k}_0\cdot\boldsymbol{r}} + e^{-i\Delta\theta(\boldsymbol{r})}e^{i\boldsymbol{k}_0\cdot\boldsymbol{r}}\right\} \tag{D.4.24}$$

二次元フーリエ変換 $\mathcal{F}[f]$ を次式で定義する．

$$\mathcal{F}[f] = \int_{-\infty}^{\infty} f(\boldsymbol{r})e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}\mathrm{d}\boldsymbol{r}$$
$$\mathcal{F}^{-1}[g] = \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\infty}^{\infty} g(\boldsymbol{k})e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}\mathrm{d}\boldsymbol{k}$$

関数 $f(\boldsymbol{r})$ と関数 $g(\boldsymbol{r})$ の合成積を

$$(f * g)(\boldsymbol{r}) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} f(\boldsymbol{\xi})g(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{\xi})\mathrm{d}\boldsymbol{\xi} \tag{D.4.25}$$

で定義すると，積のフーリエ変換は次のように変形できる．

$$\mathcal{F}\Big[f(\boldsymbol{r})\cdot g(\boldsymbol{r})\Big] = \frac{1}{(2\pi)^2}\mathcal{F}\Big[f(\boldsymbol{r})\Big]*\mathcal{F}\Big[g(\boldsymbol{r})\Big] \tag{D.4.26}$$

式 (D.4.24) をフーリエ変換すると，第 1 項は

$$\mathcal{F}\left[2e^{\frac{2|\boldsymbol{r}|^2}{\mathrm{w}^2}}\right] = \int_{-\infty}^{\infty} 2e^{\frac{2|\boldsymbol{r}|^2}{\mathrm{w}^2}}e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \mathrm{w}^2\pi\exp\left(-\frac{\mathrm{w}^2\boldsymbol{k}^2}{8}\right) \tag{D.4.27}$$

と計算できて，ビーム半径 w の大きい極限がデルタ関数になることがわかる．また，波数平面上で原点を中心としたガウシアンになっており，その半径は w に反比例する．

第 2 項，第 3 項は，

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}\left[e^{\frac{2|\boldsymbol{r}|^2}{\mathrm{w}^2}}e^{i\Delta\theta(\boldsymbol{r})}e^{-i\boldsymbol{k}_0\cdot\boldsymbol{r}}\right] &= \frac{1}{(2\pi)^2}\mathcal{F}\Big[e^{i\Delta\theta(\boldsymbol{r})}\Big]*\int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{2|\boldsymbol{r}|^2}{\mathrm{w}^2}}e^{-i(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}_0)\cdot\boldsymbol{r}}\mathrm{d}\boldsymbol{r} \\
&= \frac{1}{(2\pi)^2}\mathcal{F}\Big[e^{i\Delta\theta(\boldsymbol{r})}\Big]*\frac{\mathrm{w}^2\pi}{2}\exp\left(-\frac{\mathrm{w}^2(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}_0)^2}{8}\right) \qquad \text{(D.4.28)} \\
\mathcal{F}\left[e^{\frac{2|\boldsymbol{r}|^2}{\mathrm{w}^2}}e^{-i\Delta\theta(\boldsymbol{r})}e^{i\boldsymbol{k}_0\cdot\boldsymbol{r}}\right] &= \frac{1}{(2\pi)^2}\mathcal{F}\Big[e^{-i\Delta\theta(\boldsymbol{r})}\Big]*\int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{2|\boldsymbol{r}|^2}{\mathrm{w}^2}}e^{-i(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{k}_0)\cdot\boldsymbol{r}}\mathrm{d}\boldsymbol{r} \\
&= \frac{1}{(2\pi)^2}\mathcal{F}\Big[e^{-i\Delta\theta(\boldsymbol{r})}\Big]*\frac{\mathrm{w}^2\pi}{2}\exp\left(-\frac{\mathrm{w}^2(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{k}_0)^2}{8}\right) \qquad \text{(D.4.29)}
\end{aligned}$$

と計算できて，第 1 項と同様のガウシアンに物体波と参照波の位相差に対応する関数を合成した分布が $\boldsymbol{k}_0$，$-\boldsymbol{k}_0$ を中心として描かれる．

このように，フーリエ変換を行うことで位相差の分布 $\Delta\theta(\boldsymbol{r})$ に依存する部分と依存しない部分に分離できる．

今，フーリエ変換した結果の第 2 項を取り出し，他の項は無視する．この操作は，フーリエ変換して得られた画像のうちで所望する領域は 1，不要な領域は 0 とする窓画像を用意し，掛け算することで実現できる．

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_2 &\to \frac{1}{(2\pi)^2}\mathcal{F}\left[e^{i\Delta\theta(\boldsymbol{r})}\right]*\frac{\mathrm{w}^2\pi}{2}\exp\left(-\frac{\mathrm{w}^2(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}_0)^2}{8}\right)\\ &= \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\Delta\theta(\boldsymbol{r})}e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}\mathrm{d}\boldsymbol{r}*\frac{\mathrm{w}^2\pi}{2}\exp\left(-\frac{\mathrm{w}^2(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}_0)^2}{8}\right) \qquad \text{(D.4.30)}\end{aligned}$$

続いて，$\boldsymbol{k}'=\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}_0$ と座標変換する．この変換は，前の操作で残した点のピーク値を取る座標が原点になるように平行移動 (配列の入れ替え) させることで実現できる．

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_2 \to&\frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\Delta\theta(\boldsymbol{r})}e^{-i(\boldsymbol{k}'+\boldsymbol{k}_0)\cdot\boldsymbol{r}}\mathrm{d}\boldsymbol{r}*\frac{\mathrm{w}^2\pi}{2}\exp\left(-\frac{\mathrm{w}^2\boldsymbol{k}'^2}{8}\right)\\ =&\frac{1}{(2\pi)^2}\mathcal{F}'\left[e^{i\Delta\theta(\boldsymbol{r})}e^{-i\boldsymbol{k}_0\cdot\boldsymbol{r}}\right]*\mathcal{F}'\left[e^{\frac{2|\boldsymbol{r}|^2}{\mathrm{w}^2}}\right] \qquad \text{(D.4.31)}\end{aligned}$$

$\mathcal{F}'$ は $\boldsymbol{k}'$ 空間にフーリエ変換することを意味しており，最後の変形は式 (D.4.27) の結果を用いている．

$$\mathcal{F}^{-1}\left[f(\boldsymbol{k})*g(\boldsymbol{k})\right]=(2\pi)^2\mathcal{F}^{-1}\left[f(\boldsymbol{k})\right]\mathcal{F}^{-1}\left[f(\boldsymbol{k})\right] \qquad \text{(D.4.32)}$$

が成り立つので，これを用いて式 (D.4.31) を逆フーリエ変換する．$\mathcal{F}'\left[e^{i\Delta\theta(\boldsymbol{r})}e^{-i\boldsymbol{k}_0\cdot\boldsymbol{r}}\right]=\mathcal{F}\left[e^{i\Delta\theta(\boldsymbol{r})}\right]$ が成り立つこと及び実関数の (逆) フーリエ変換では座標変換の前後で変化がないことに注意すれば

$$\begin{aligned}I_2(\boldsymbol{r}) &= \mathcal{F}^{-1}\left[\mathcal{I}_2\right]\\ &= e^{\frac{2|\boldsymbol{r}|^2}{\mathrm{w}^2}}e^{i\Delta\theta(\boldsymbol{r})} \qquad \text{(D.4.33)}\end{aligned}$$

と計算できて，同様に考えると入射する光の空間モードに関する仮定を入れなくても

$$I_2(\boldsymbol{r})=|U_O(\boldsymbol{r})|\cdot|U_R(\boldsymbol{r})|e^{i\Delta\theta(\boldsymbol{r})} \qquad \text{(D.4.34)}$$

を得られる．

対数をとると

$$\ln I_2(\boldsymbol{r}) = \ln |U_O(\boldsymbol{r})| \cdot |U_R(\boldsymbol{r})| + i\Delta\theta(\boldsymbol{r}) \tag{D.4.35}$$

であるから，これの虚部を取れば所望の位相分布が得られる．

$$\Delta\theta(\boldsymbol{r}) = \Im\Big[\ln I_2(\boldsymbol{r})\Big] \tag{D.4.36}$$

測定のための光学系を図 D.7 に，測定結果を図 D.8 にそれぞれ示した．SLM の表面精度と誘電体多層膜の表面精度とでは，この測定においては有意な差は見られず，SLM の表面は干渉が重要な役割を果たす実験においても十分に平らな面と見なせることがわかった．

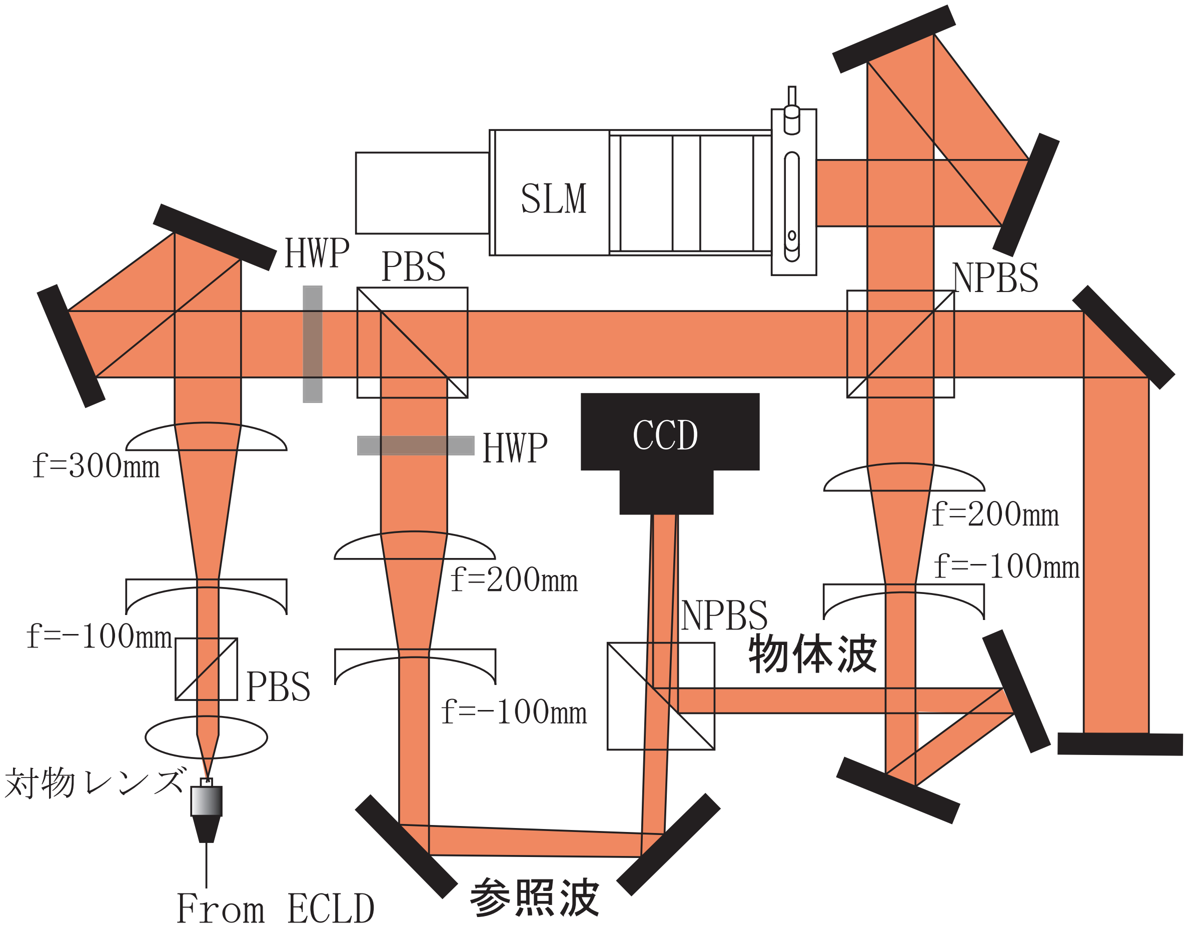

図 D.7　SLM の表面精度を測定するための光学系の模式図．外部共振器付き半導体レーザー (ECLD) からの光を単一モードファイバーによってビームウェスト 1.5 mm のガウシアンビームに整え，2 倍に拡大したビームを用意した．これを用いて参照波と物体波を作成し，無偏光ビームスプリッター (NPBS) で混ぜた後，CCD カメラで干渉縞を撮像した．物体波としては，空間光位相変調器 (SLM) と誘電体多層膜ミラーのそれぞれから極力類似させた光路を経由して CCD に入力されるように調整されており，それぞれの場合で測定を行った．

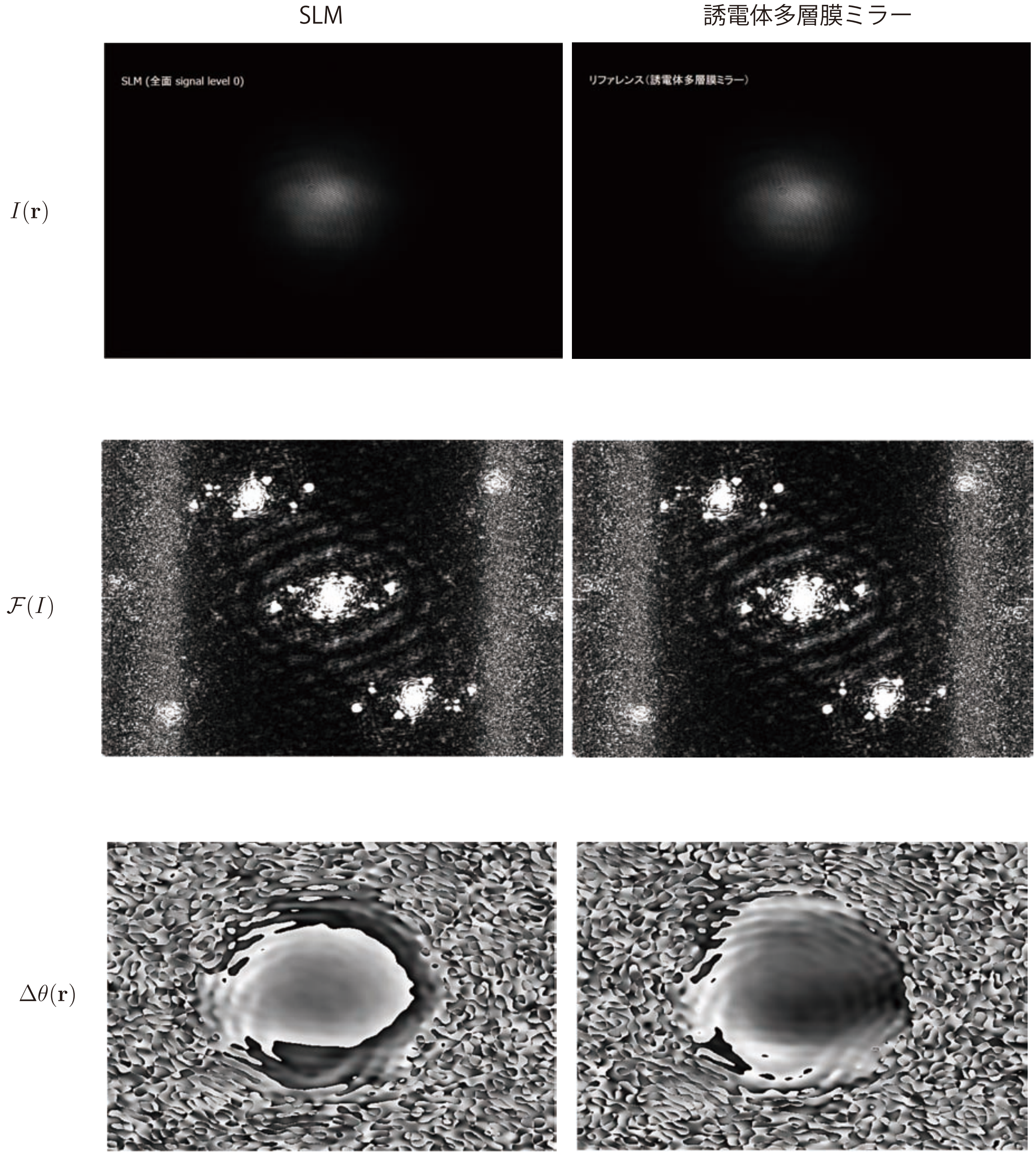

図 D.8 SLM の表面精度．SLM に対する測定（左）と誘電体多層膜に対する測定（右）．

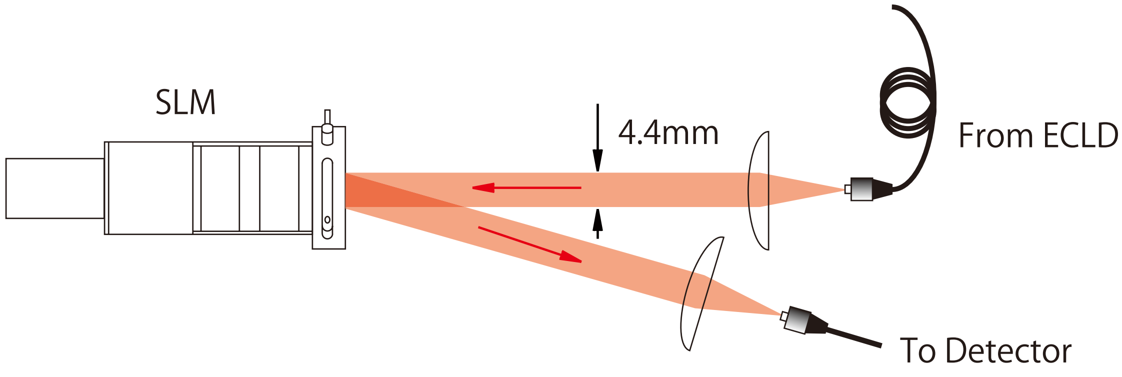

図 D.9　射影測定の行うための光学系の模式図．単一モードファイバーから出射されたガウシアンビームに SLM で位相分布を加え，それを別の単一モードファイバーへ結合させて透過光強度を測定する．

D.4.3　射影測定

光子の軌道角運動量状態に関する射影測定は，空間位相変調によって空間モードを変換したあと，単一モードファイバーでガウシアンモードの成分を選びだすことで行われる．そこで，これらの変換・選択が SLM を用いて十分理想的に行えることを，古典的な強度のレーザー光を用いて確かめた．

ビームウェスト w の LG ビームのくびれの位置での複素振幅は，ビームの伝播軸方向を z とした円筒座標系 (r, φ, z) で次のように書ける．

$$\mathrm{LG}_{00}(w) = \frac{1}{w}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\exp\left(\ \ \frac{r^2}{w^2}\right). \tag{D.4.37}$$

ビームウェスト w_0 のガウシアンビームに $T(x, y)$ の位相変調を加えたビームに含まれる，ビームウェスト w_0 の LG_{00} 成分は次のように計算できる．なお，$x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ で定義する．

$$a = \left|\int_0^\infty r\mathrm{d}r\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\ T(x, y)\mathrm{LG}_{00}(w_0)\mathrm{LG}^*_{00}(w_0)\right|^2. \tag{D.4.38}$$

図 D.9 に示すように，単一モードファイバーから出射されたガウシアンビームに SLM で位相変調 $T(x, y)$ を加え，それを $T(x, y) = 1$ に対して最適化された別の単一モードファイバーへ結合させて透過光強度を測定した．ガウシアンビームのビームウェスト $2w_0 = 4.4\,\mathrm{mm}$ とした．まず，$T(x, y) = e^{i\arg(x\ \ x_0+i(y\ \ y_0))}$ で指定される渦状の位相変

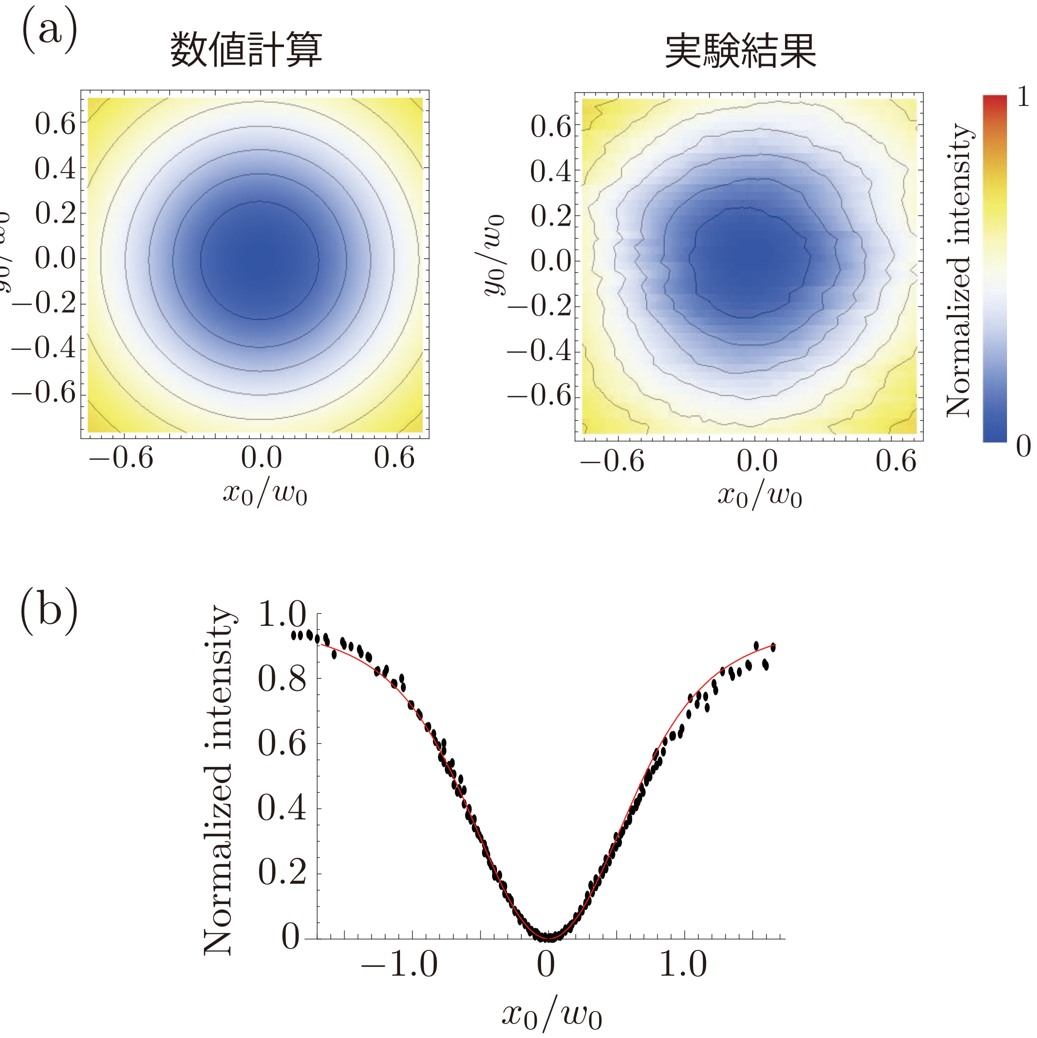

図 D.10　(a)$T(x,y) = e^{i\,\arg(x-x_0+i(y-y_0))}$ によって位相変調された光ビームに含まれるガウシアンモード成分．$w_0 = 2.2\,\mathrm{mm}$．(b)$T(x,y) = e^{i\,\arg(x-x_0+iy)}$ によって位相変調された光ビームに含まれるガウシアンモード成分．実線は式 (D.4.38) から計算された理論曲線である．

調を用意し，様々な (x_0, y_0) に対して透過光強度を測定した後，$T(x,y) = 1$ の場合の光強度で規格化されたものを測定値とした．ここで，$\arg(z)$ は複素数 z の偏角を返す関数である．位相変調は図 D.1 と同様であり，$T(x,y) = e^{i\,\arg(x-x_0+i(y-y_0))}$ にグレーティング構造を上乗せしたパターンである．グレーティングの空間周期は 4px $\sim$ 100 μm であり，回折効率は 25% 程度であった．

実験結果と数値計算結果との比較を図 D.10 に示す．実験結果と数値計算結果とは非常に良い一致を見せており，SLM による位相変調が十分理想的であることが確認された．

同様の測定を $T(x,y) = e^{i\frac{\pi}{2}\mathrm{sgn}(x-x_0)}$ で指定される位相変調の場合に行った結果を図 D.11 に示す．ここで，$\mathrm{sgn}(x)$ は実数 x が正のときに 1 を，ゼロのときに 0 を，負の

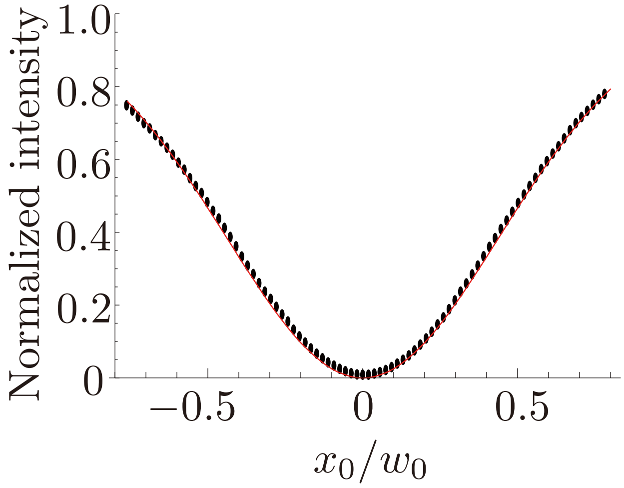

図 D.11 $T(x,y)=e^{i\frac{\pi}{2}\mathrm{sgn}(x-x_0)}$ によって位相変調された光ビームに含まれるガウシアンモード成分．実線は式 (D.4.38) によって計算された理論曲線である．

ときに -1 をそれぞれ返す関数である．こちらも，実験結果と数値計算結果とが非常に良い一致を見せている．

以上の予備実験の結果から，SLM を用いた位相変調は，それが離散的な変調であるにも関わらず，グレーティング構造を上乗せしてやることによって，連続的な位相変調を仮定した理想的なモデルと十分一致させられることが確認できた．

D.4.4 渦状に位相変調された光ビームと LG ビーム

ビームウェスト w の LG ビームのくびれの位置での複素振幅は，ビームの伝播軸方向を z とした円筒座標系 (r,φ,z) で次のように書ける．

$$\mathrm{LG}_{00}(w)=\frac{1}{w}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\exp\left(-\frac{r^2}{w^2}\right), \tag{D.4.39}$$

$$\mathrm{LG}_{01}(w)=\mathrm{LG}_{00}(w)\frac{r\sqrt{2}}{w}e^{i\varphi}. \tag{D.4.40}$$

ビームウェスト w_1 のガウシアンビームに最適化されたシングルモードファイバーへの，ビームウェスト w_0 のガウシアンビームの結合効率[*2]FCE(w_1) は次のように計算できる．

$$\mathrm{FCE}(w_1)=|a(w_1)|^2, \tag{D.4.41}$$

$$a(w_1)=\int_0^\infty r\mathrm{d}r\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\ \mathrm{LG}_{00}(w_0)\mathrm{LG}^*_{00}(w_1). \tag{D.4.42}$$

[*2] ビームウェスト w_0 のガウシアンビームに含まれる，ビームウェスト w_1 のガウシアンビーム成分

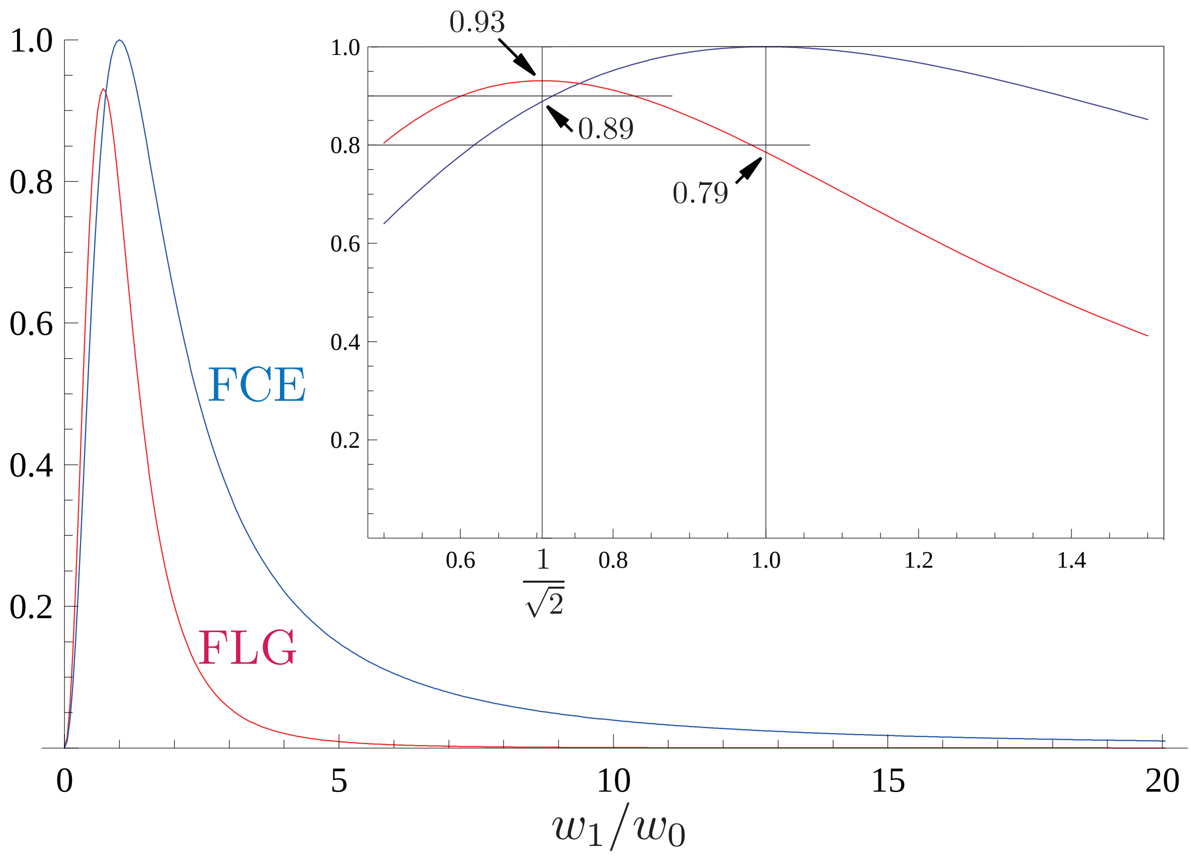

図 D.12　渦状に位相変調されたガウシアンビームに含まれる LG モードのフラックス．

ビームウェスト w_0 のガウシアンビームに $e^{i\varphi}$ の位相変調を加えたビームに含まれる，ビームウェスト w_1 の LG_{01} 成分 $\mathrm{FLG}(w_1)$ は次のように計算できる．

$$\mathrm{FLG}(w_1) = |b(w_1)|^2, \tag{D.4.43}$$

$$b(w_1) = \int_0^\infty r\mathrm{d}r \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi\ e^{i\varphi}\mathrm{LG}_{00}(w_0)\mathrm{LG}^*_{01}(w_1). \tag{D.4.44}$$

$\mathrm{FLG}(w_1)$ をプロットしたのが図 D.12 である．$\mathrm{FLG}(w_1)$ は $w_1 = w_0/\sqrt{2}$ で最大値 0.93 をとる．すなわち，渦状に位相変調されたビームウェスト w_0 のガウシアンビームに最も近いのは，ビームウェスト $w_0/\sqrt{2}$ の LG ビームである．

このことは，被測定光の空間モードを位相変調と単一モードファイバーによって選択する実験において，「ガウシアンモードで検出する際のビームウェスト」と「LG モードで検出する際のビームウェスト」が $\sqrt{2}$ 倍だけ異なることを意味する．しかし，図 D.12 に同時にプロットした $\mathrm{FCE}(w_1)$ を見れば明らかなように，仮に単一モードファイバーが真に単一の空間モードだけを選びだすと仮定しても[*3]，$w_1 = w_0/\sqrt{2}$ で 89% の光強度を透過

[*3] この仮定は単一モードファイバーが特定の空間モードをデルタ関数的に選ぶことができることを意味し，

させることになる．したがって，$0.93 \times 0.89 \sim 0.83$ を考慮して，この影響を測定値に含まれる 20% の誤差として取り扱うことにした．

なお，ここでビームウェストの変化として説明した効果は，ビームウェストを固定して議論した場合に式 (A.1.10) 中の動径方向の指数 $p \neq 0$ の成分の混入という描像で取り扱うことができる．図 D.12 によれば $\mathrm{FLG}(w_0) = 0.79$ であるが，残りの 20% 程度が $p \neq 0$ の成分に相当すると解釈できる．

実際よりも厳しい見積もりになっていると考えられる．

付録 E

量子状態推定

2 粒子の複合系の状態を，実験的に可能な射影測定の組み合わせで決定することを考える [74, 101].

E.1　線形推定

まず，2 次元自由度を持った 1 粒子の状態について考え，その手法を 2 粒子の場合に拡張する．続いて，3 次元自由度を持った粒子に対する手法に拡張する．

E.1.1　2 次元自由度を持った 1 粒子の状態

ある粒子の状態が，$|0\rangle$，$|1\rangle$ という基底で表現できる場合を考える．密度行列 $\hat{\rho}$ は a，b，c，d を実数として

$$\hat{\rho} = \begin{pmatrix} a & b - ic \\ b + ic & d \end{pmatrix} \tag{E.1.1}$$

で与えられる．ここで，$\mathrm{Tr}\hat{\rho} = a + d = 1$ である．この密度行列は，パウリ行列

$$\sigma_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{I}{\sqrt{2}} \tag{E.1.2}$$

$$\sigma_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{E.1.3}$$

$$\sigma_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \tag{E.1.4}$$

$$\sigma_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{E.1.5}$$

を使って展開できて，

$$\begin{aligned}\hat{\rho} &= \frac{a+d}{\sqrt{2}}\sigma_0 + \sqrt{2}b\sigma_1 + \sqrt{2}c\sigma_2 + \frac{a-d}{\sqrt{2}}\sigma_3 \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\sigma_0 + \sqrt{2}b\sigma_1 + \sqrt{2}c\sigma_2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - d\right)\sigma_3 \\ &\equiv \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{\mu=0}^{3}\frac{S_\mu}{S_0}\sigma_\mu\end{aligned} \tag{E.1.6}$$

と書ける．パウリ行列は δ_{ij} をクロネッカーのデルタとして

$$\mathrm{Tr}\Big[\sigma_i\sigma_j\Big] = \delta_{ij} \tag{E.1.7}$$

を満たす．すなわち，上記の積に対して正規直交化されている．したがって，

$$\frac{S_\mu}{\sqrt{2}S_0} = \mathrm{Tr}\Big[\sigma_\mu\hat{\rho}\Big] \equiv r_\mu \tag{E.1.8}$$

とおくことができて，密度行列は

$$\hat{\rho} = \sum_{\nu=0}^{3} r_\nu\sigma_\nu \tag{E.1.9}$$

と表せる．

実験では，適当な基底に射影して光子計数を行う．この基底を $|\psi_\nu\rangle$ とし，対応する計数値を n_ν とすると，

$$n_\nu = N\cdot\mathrm{Tr}\Big[|\psi_\nu\rangle\langle\psi_\nu|\,\hat{\rho}\Big] \tag{E.1.10}$$

と表される．ここで，N は光子のフラックスによって決まる定数である．この式に式 (E.1.9) を代入して展開すると，測定値 n_ν とベクトル r_μ の間に線形な関係式

$$\begin{aligned}n_\nu &= N\cdot\mathrm{Tr}\Big[|\psi_\nu\rangle\langle\psi_\nu|\sum_{\mu=0}^{3} r_\mu\sigma_\mu\Big] \\ &\equiv N\sum_{\mu=0}^{3} B_{\nu,\mu}r_\mu\end{aligned} \tag{E.1.11}$$

が成り立つと期待される．ここで B は 4×4 の行列であって，各成分は

$$B_{\nu,\mu} \equiv \mathrm{Tr}\Big[|\psi_\nu\rangle\langle\psi_\nu|\,\sigma_\mu\Big] \tag{E.1.12}$$

で与えられる．この行列は，4 種類の測定基底を適当に決めてやれば求めることができる．

今，B が正則行列であるとすると，式 (E.1.11) を変換して

$$r_\nu = N^{-1} \sum_{\mu=0}^{3} B^{-1}_{\nu,\mu} n_\mu \tag{E.1.13}$$

が成り立ち，これを式 (E.1.9) に代入して

$$\begin{aligned}\hat{\rho} &= \sum_{\nu=0}^{3} r_\nu \sigma_\nu \\ &= \sum_{\nu=0}^{3} N^{-1} \sum_{\mu=0}^{3} B^{-1}_{\nu,\mu} n_\mu \sigma_\nu \\ &= \sum_{\mu=0}^{3} \hat{M}_\mu \frac{n_\mu}{N}\end{aligned} \tag{E.1.14}$$

を得る．ここで，

$$\hat{M}_\mu \equiv \sum_{\nu=0}^{3} B^{-1}_{\nu,\mu} \sigma_\nu \tag{E.1.15}$$

とした．

このように，4 通りの基底に対して n_μ を測定することで $N \cdot \hat{\rho}$ を再構築することができて，$\mathrm{Tr}\hat{\rho} = 1$ によって N を決めれば $\hat{\rho}$ を再構築できることがわかる．

以下では，具体的な基底を用いて考える．$|0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, |1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ とすると，任意の重ね合わせ $|\boldsymbol{n}\rangle$ はストークスベクトル

$$\boldsymbol{n} = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi \\ \cos\theta \end{pmatrix} \tag{E.1.16}$$

で特徴付けることができる．すなわち，

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{n} = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) \cdot \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi \\ \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & e^{-i\varphi}\sin\theta \\ e^{i\varphi}\sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix} \tag{E.1.17}$$

に対して，行列 $\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{n}$ の固有値 $\lambda = \pm 1$ であって，それぞれに属する固有ベクトルを $|+\boldsymbol{n}\rangle$，$|-\boldsymbol{n}\rangle$ と書くことにすると，

$$|+\boldsymbol{n}\rangle = \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} e^{-i\frac{\varphi}{2}} \\ \sin\frac{\theta}{2} e^{i\frac{\varphi}{2}} \end{pmatrix} \tag{E.1.18}$$

$$|-\boldsymbol{n}\rangle = \begin{pmatrix} \sin\frac{\theta}{2} e^{-i\frac{\varphi}{2}} \\ -\cos\frac{\theta}{2} e^{i\frac{\varphi}{2}} \end{pmatrix} \tag{E.1.19}$$

である．異なる固有値に属する固有ベクトルは直交するので，$|+\boldsymbol{n}\rangle$ と $|-\boldsymbol{n}\rangle$ とは直交する．これを使って以下の 3 通りの直交基底の組み合わせを用意できる．

$$\begin{cases} |0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ |1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{cases} \qquad (\theta = \varphi = 0) \tag{E.1.20}$$

$$\begin{cases} |+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ |-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \end{cases} \qquad (\theta = \frac{\pi}{2},\ \varphi = 0) \tag{E.1.21}$$

$$\begin{cases} |u\rangle = \frac{e^{-i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \\ |d\rangle = \frac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} \end{cases} \qquad (\theta = \frac{\pi}{2},\ \varphi = \frac{\pi}{2}) \tag{E.1.22}$$

なお，上記の直交基底を用いて，パウリ行列は

$$\sigma_0 = |0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1| \tag{E.1.23}$$
$$\sigma_1 = |+\rangle\langle +| - |-\rangle\langle -| \tag{E.1.24}$$
$$\sigma_2 = |u\rangle\langle u| - |d\rangle\langle d| \tag{E.1.25}$$
$$\sigma_3 = |0\rangle\langle 0| - |1\rangle\langle 1| \tag{E.1.26}$$

と表される．

ここで，$|\psi_0\rangle = |0\rangle$，$|\psi_1\rangle = |1\rangle$，$|\psi_2\rangle = |+\rangle = (|0\rangle + |1\rangle)/\sqrt{2}$，$|\psi_3\rangle = |u\rangle = (|0\rangle + i\,|1\rangle)/\sqrt{2}$ を選ぶと，

$$B = \begin{pmatrix} B_{00} & B_{01} & B_{02} & B_{03} \\ B_{10} & B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{20} & B_{21} & B_{22} & B_{23} \\ B_{30} & B_{31} & B_{32} & B_{33} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{E.1.27}$$

であり，逆行列は

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} B^{-1}_{00} & B^{-1}_{01} & B^{-1}_{02} & B^{-1}_{03} \\ B^{-1}_{10} & B^{-1}_{11} & B^{-1}_{12} & B^{-1}_{13} \\ B^{-1}_{20} & B^{-1}_{21} & B^{-1}_{22} & B^{-1}_{23} \\ B^{-1}_{30} & B^{-1}_{31} & B^{-1}_{32} & B^{-1}_{33} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{E.1.28}$$

で与えられる．このとき，

$$\begin{aligned}\hat{M}_0 &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & -1+i \\ -1-i & 0 \end{pmatrix} \\ \hat{M}_1 &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -1+i \\ -1-i & 2 \end{pmatrix} \\ \hat{M}_2 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ \hat{M}_3 &= \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}\end{aligned} \tag{E.1.29}$$

である．今，$n_0 = 1000$，$n_1 = 1$，$n_2 = 499$，$n_3 = 501$ とすると，

$$\hat{\rho} = \begin{pmatrix} 0.999 & -0.001-0.0005i \\ -0.001+0.0005i & 0.001 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{E.1.30}$$

を得る．

E.1.2　2 次元自由度を持った 2 粒子の状態

E.1.1 で考察した粒子の，2 粒子複合系の状態を考える．この状態は 4×4 の密度行列で記述され，それはパウリ行列の直積で展開できると期待される．密度行列の展開基底 Γ_ν を，

$$\Gamma_\nu = \Gamma_{4i+j} = \sigma_i \otimes \sigma_j \tag{E.1.31}$$

で定義する．このとき，(i, j) と ν は 1 対 1 対応する．

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}\left[\Gamma_\mu \Gamma_\nu\right] &= \mathrm{Tr}\left[(\sigma_i \otimes \sigma_j)(\sigma_{i'} \otimes \sigma_{j'})\right] \\ &= \mathrm{Tr}\left[(\sigma_i \sigma_{i'}) \otimes (\sigma_j \sigma_{j'})\right] \\ &= \mathrm{Tr}\left[\sigma_i \sigma_{i'}\right] \mathrm{Tr}\left[\sigma_j \sigma_{j'}\right] \\ &= \delta_{ii'} \delta_{jj'} \\ &= \delta_{\mu\nu}\end{aligned} \tag{E.1.32}$$

が成り立つので，E.1.1 と同様にして

$$\hat{\rho} = \sum_{\nu=0}^{15} \Gamma_\nu r_\nu \tag{E.1.33}$$

と展開できて，

$$r_\mu = \mathrm{Tr}\left[\Gamma_\mu \hat{\rho}\right] \tag{E.1.34}$$

である．測定基底を $|\psi_\nu\rangle$ とすると，対応する計数値 n_ν は

$$n_\nu = N\mathrm{Tr}\left[|\psi_\nu\rangle\langle\psi_\nu|\,\hat{\rho}\right] \tag{E.1.35}$$

で与えられ，r_μ と n_ν の間に期待される線形な関係式は

$$\begin{aligned} n_\nu &= N\mathrm{Tr}\left[|\psi_\nu\rangle\langle\psi_\nu| \sum_{\mu=0}^{15} \Gamma_\mu r_\mu\right] \\ &\equiv N\sum_{\nu=0}^{15} B_{\nu,\mu} r_\mu \end{aligned} \tag{E.1.36}$$

である．ただし，B は 16×16 の行列であって，その成分は

$$B_{\nu,\mu} \equiv \mathrm{Tr}\left[|\psi_\nu\rangle\langle\psi_\nu|\,\Gamma_\mu\right] \tag{E.1.37}$$

で与えられる．この行列は，16 種類の測定基底を適当に決めてやれば求めることができる．

今，B が正則行列であるとすると，式 (E.1.36) を変換して

$$r_\nu = N^{-1}\sum_{\mu=0}^{15} B^{-1}_{\nu,\mu} n_\mu \tag{E.1.38}$$

が成り立ち，これを式 (E.1.33) に代入して

$$\begin{aligned} \hat{\rho} &= \sum_{\nu=0}^{15} \Gamma_\nu N^{-1} \sum_{\mu=0}^{15} B^{-1}_{\nu,\mu} n_\mu \\ &= \sum_{\mu=0}^{15} \hat{M}_\mu \frac{n_\mu}{N} \end{aligned} \tag{E.1.39}$$

を得る．ただし，

$$\hat{M}_\mu \equiv \sum_{\nu=0}^{15} B^{-1}_{\nu,\mu} \Gamma_\nu \tag{E.1.40}$$

である．

E.1.3　3 次元自由度を持った 1 粒子/2 粒子の状態

線形トモグラフィーを用いて密度行列を再構築するにあたっては，式 (E.1.9) のように一般の密度行列を展開できることが必要である．そのためには, 式 (E.1.9) の "基底"$\{\sigma_i\}_i$ に $\mathrm{Tr}[\sigma_i\sigma_j]=\delta_{ij}$，すなわち "正規直交性" が要請される．

2 次元自由度を持った粒子に関しては，多数個の複合系の状態であったとしても，パウリ行列の直積で構成される行列が上記の要請を満たすものであった．しかし，3 次元自由度を持った粒子の状態を表現するにあたってパウリ行列を用いることはできず，それに代わる新しい行列の組が必要である．この新しい行列の組は以下に示す 9 個の行列であり，ゲルマン行列と呼ばれる．

$$\sigma_0=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},\ \sigma_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\ \sigma_2=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0&-i&0\\i&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},$$
$$\sigma_3=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&0\end{pmatrix},\ \sigma_4=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix},\ \sigma_5=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0&0&-i\\0&0&0\\i&0&0\end{pmatrix},$$
$$\sigma_6=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix},\ \sigma_7=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&-i\\0&i&0\end{pmatrix},\ \sigma_8=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-2\end{pmatrix}.$$

この 9 個の行列をパウリ行列の代わりに用いることで，2 次元自由度を持った粒子の状態に関する E.1.1 での議論を 3 次元自由度を持った粒子の状態に関する議論に拡張できる．同様に，ゲルマン行列の直積で構成される 81 個の行列を導入することで，E.1.2 での議論を拡張できる．煩雑ではあるが拡張は自明なので，詳細は割愛する．なお，これらについては，[102] で論じられている．

E.2　最尤推定

線形推定によって再構築された密度行列 $\hat{\rho}$ は規格化されており ($\mathrm{Tr}\hat{\rho}=1$ を満たす)，またエルミートである ($\hat{\rho}^\dagger=\hat{\rho}$)．一方で，あらゆる物理的な状態を記述する密度行列は非負，すなわち固有値 λ は $0\leq\lambda\leq1$ の範囲でなければならず，各固有値の和は 1 でなければならない (換言すれば $0\leq\mathrm{Tr}[\hat{\rho}^2]\leq1$) が，線形推定にはそのような制限が加えられていないため，実験的に得られる光子計数値において不可避なポアソン揺らぎ等の影響によって固有値が負値を取ってしまう場合がある．これは，特に純粋度の高い密度行列を再構築する場合に顕著な，一般的な問題である．例えば最大限エンタングルした状態を考えると，理論上の固有値は 1, 0, 0, 0 であり，$\mathrm{Tr}[\hat{\rho}^2]=1$ である．対象となる状態のエンタ

ングルメントの度合いが大きければ大きいほど，線形推定によって再構築された密度行列が物理的な要請から外れやすくなる．

上記の問題を解決するために導入された手法が最尤推定である．これは，測定値を密度行列で “フィッティング” することに相当する．密度行列の最尤推定にあたっては，いくつかのパラメータを用いて “物理的な” 密度行列を仮定する．すなわち，規格化された，エルミートな，非負な密度行列のモデルを立てる．このモデルと実験で得られた光子計数値の一致の程度を表す尤度関数を定義し，尤度が最大となるようパラメータを最適化する．尤度関数は，密度行列のモデルに用いたパラメータと光子計数値の関数として与えられる．最適化されたパラメータをモデルに代入することで，所望の密度行列が得られる．

E.2.1　密度行列の最尤推定

非負なエルミート行列 $\hat{\rho}$ は，対角成分が実数の下三角行列 $\hat{T}$ を使って

$$\hat{\rho} = \hat{T}^\dagger \hat{T} \tag{E.2.1}$$

と分解できる．この分解はコレスキー分解と呼ばれる．

ある行列 $\hat{G}$ が非負であるための条件は，数学的には

$$\langle\psi|\hat{G}|\psi\rangle \geq 0 \quad \forall\,|\psi\rangle \tag{E.2.2}$$

で与えられるが，$\hat{G} = \hat{T}^\dagger\hat{T}$ で与えられる任意の行列は，式 (E.2.2) を満たす．実際，$|\psi'\rangle = \hat{T}\,|\psi\rangle$ とすると，

$$\langle\psi|\hat{G}|\psi\rangle = \langle\psi|\hat{T}^\dagger\hat{T}|\psi\rangle = \langle\psi'|\psi'\rangle \geq 0 \tag{E.2.3}$$

が成り立っている．また，

$$\hat{G}^\dagger = (\hat{T}^\dagger\hat{T})^\dagger = \hat{T}^\dagger(\hat{T}^\dagger)^\dagger = \hat{T}^\dagger\hat{T} = \hat{G} \tag{E.2.4}$$

より，$\hat{G} = \hat{T}^\dagger\hat{T}$ はエルミートであることも確認できる．

そこで，実数のパラメータ $\theta = \{\theta_i\}_{i=1}^{\max}$ を使って下三角行列 $\hat{T}_\theta$ を

$$\hat{T}_\theta \equiv \begin{pmatrix} \theta_1 & 0 & 0 & 0 \\ \theta_2 + i\theta_3 & \theta_8 & 0 & 0 \\ \theta_4 + i\theta_5 & \theta_9 + i\theta_{10} & \theta_{13} & 0 \\ \theta_6 + i\theta_7 & \theta_{11} + i\theta_{12} & \theta_{14} + i\theta_{15} & \theta_{16} \end{pmatrix} \tag{E.2.5}$$

のように定義する．式 (E.2.5) は 4×4 の場合の例であるが，9×9 などへの拡張は容易だろう．これを用いることで，密度行列 $\hat{\rho}$ のモデル $\hat{\rho}_\theta$ を

$$\hat{\rho}_\theta = \frac{\hat{T}_\theta^\dagger \hat{T}_\theta}{\mathrm{Tr}[\hat{T}_\theta^\dagger \hat{T}_\theta]} \tag{E.2.6}$$

で与えることができる．この行列は，規格化された，エルミートな，非負な密度行列のモデルに対応している．

測定基底を $\{|\psi_\nu\rangle\}_{\nu=1}^{\max}$ とすると，各測定基底に対応する光子計数の理論値 $\{M_\nu(\theta)\}_{\nu=1}^{\max}$ は

$$\begin{aligned} M_\nu(\theta) &= N\mathrm{Tr}[|\psi_\nu\rangle\langle\psi_\nu|\,\hat{\rho}_\theta] \\ &= \frac{N}{\mathrm{Tr}[\hat{T}_\theta^\dagger \hat{T}_\theta]}\mathrm{Tr}[|\psi_\nu\rangle\langle\psi_\nu|\,\hat{T}_\theta^\dagger \hat{T}_\theta] \qquad \text{(E.2.7)} \\ &\equiv \mathrm{Tr}[|\psi_\nu\rangle\langle\psi_\nu|\,\hat{T}_\theta^\dagger \hat{T}_\theta] \qquad \text{(E.2.8)} \end{aligned}$$

で与えられる．

ある測定基底 $|\psi_\nu\rangle$ に対応する光子計数の真値を λ_ν とすると，光子計数値はポアソン分布に従うため，計数値 n_ν を得る確率はポアソン確率分布関数

$$p(n_\nu) = e^{-\lambda_\nu}\frac{(\lambda_\nu)^{n_\nu}}{n_\nu!} \qquad \text{(E.2.9)}$$

で計算できる．この関数 $p(n_\nu)$ は，$n_\nu = \lambda_\nu$ のとき最大値をとる．すなわち，$n = \{n_\nu\}_{\nu=1}^{\max}$，$\theta = \{\theta_\nu\}_{\nu=1}^{\max}$ に対して，尤度関数 $P(n|\theta)$ として

$$P(n|\theta) \equiv \prod_{\nu=1}^{\max} p(n|\theta) = \prod_{\nu=1}^{\max} e^{-M_\nu(\theta)}\frac{M_\nu(\theta)^{n_\nu}}{n_\nu!} \qquad \text{(E.2.10)}$$

を採用すればこの関数を最大にするパラメータ $\theta = \{\theta_i\}_{i=1}^{\max}$ を決定できて，密度行列 $\hat{\rho}_\theta$ を決定できる．実際には，数値計算上の便利のために，尤度関数の対数をとった対数尤度関数

$$\ln[P(n|\theta)] = \sum_{\nu=1}^{\max}[-M_\nu(\theta) + \log M_\nu(\theta)^{n_\nu} - \log n_\nu!] \qquad \text{(E.2.11)}$$

を用いる．

直感的には，密度行列の最尤推定は，光子計数値 n_ν がポアソン分布の半値全幅 $\sqrt{n_\nu}$ 程度の揺らぎを持つと考えその範囲で計数値を様々に変えながら，物理的要請を満たしつつ計数値を最もよく説明できる密度行列を探す手法であると言える．

E.2.2　赤池情報量基準

赤池情報量基準 (AIC; Akaike's Information Criterion) [103] は，モデルを構築する際の妥当なパラメータ数[*1]を与える指標であり，次の式で定義される．

$$\mathcal{A}^{(k)}(\theta) = -2\ln[P^{(k)}(n|\theta)] + 2k. \qquad \text{(E.2.12)}$$

[*1] ある物理現象に対する測定結果を説明するモデルを構築するにあたって，モデルのパラメータ数を大きくすれば大きくするほどその測定結果とモデルの一致度を高めることができるのは直感的に明らかであろ

ここで k はパラメータの数であり，$\ln[P^{(k)}(n|\theta)]$ はパラメータ数を k とした対数尤度関数である．

$\mathcal{A}^{(k)}$ を最小にするパラメータ数 k が最適なパラメータ数に相当する．

密度行列 $\hat{\rho}_\theta$ が 16 個のパラメータで指定される，階数 4 の密度行列であるとする．$\hat{G} = \hat{T}^\dagger \hat{T}$ のとき，$\hat{G}$ の階数と $\hat{T}$ の階数は一致するので，

$$\hat{\rho}^{(k)}(\theta) \equiv \frac{(\hat{T}_\theta^{(k)})^\dagger \hat{T}_\theta^{(k)}}{\mathrm{Tr}[(\hat{T}_\theta^{(k)})^\dagger \hat{T}_\theta^{(k)}]} \tag{E.2.13}$$

で定義される密度行列のモデル $\hat{\rho}^{(k)}(\theta)$ に対して，階数 1，2，3，4 に対応する行列 $\hat{T}^{(k)}$ はそれぞれ

$$\hat{T}_\theta^{(7)} = \begin{pmatrix} \theta_1 & 0 & 0 & 0 \\ \theta_2 + i\theta_3 & 0 & 0 & 0 \\ \theta_4 + i\theta_5 & 0 & 0 & 0 \\ \theta_6 + i\theta_7 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{E.2.14}$$

$$\hat{T}_\theta^{(12)} = \begin{pmatrix} \theta_1 & 0 & 0 & 0 \\ \theta_2 + i\theta_3 & \theta_8 & 0 & 0 \\ \theta_4 + i\theta_5 & \theta_9 + i\theta_{10} & 0 & 0 \\ \theta_6 + i\theta_7 & \theta_{11} + i\theta_{12} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{E.2.15}$$

$$\hat{T}_\theta^{(15)} = \begin{pmatrix} \theta_1 & 0 & 0 & 0 \\ \theta_2 + i\theta_3 & \theta_8 & 0 & 0 \\ \theta_4 + i\theta_5 & \theta_9 + i\theta_{10} & \theta_{13} & 0 \\ \theta_6 + i\theta_7 & \theta_{11} + i\theta_{12} & \theta_{14} + i\theta_{15} & 0 \end{pmatrix}, \tag{E.2.16}$$

$$\hat{T}_\theta^{(16)} = \begin{pmatrix} \theta_1 & 0 & 0 & 0 \\ \theta_2 + i\theta_3 & \theta_8 & 0 & 0 \\ \theta_4 + i\theta_5 & \theta_9 + i\theta_{10} & \theta_{13} & 0 \\ \theta_6 + i\theta_7 & \theta_{11} + i\theta_{12} & \theta_{14} + i\theta_{15} & \theta_{16} \end{pmatrix} \tag{E.2.17}$$

である．式 (E.2.7) および式 (E.2.11) をそれぞれ上記の $\hat{T}^{(k)}$ を用いた表現に書き直すと

$$M_\nu^{(k)}(\theta) = \mathrm{Tr}[|\psi_\nu\rangle\langle\psi_\nu|\,(\hat{T}_\theta^{(k)})^\dagger \hat{T}_\theta^{(k)}], \tag{E.2.18}$$

う．しかし，パラメータ数を過度に大きくした場合，モデルがその測定結果に特有のノイズ等の影響を大きく受けると考えられ，パラメータ数を増やすことによって逆にその物理現象の本質的な姿から遠ざかってしまう恐れもある．この考察から，モデルのパラメータ数に適切な大きさが存在することが直感的に理解できる．

$$\ln[P^{(k)}(n|\theta)] = \sum_{\nu=1}^{16} e^{-M_\nu^{(k)}(\theta)} \frac{M_\nu^{(k)}(\theta)^{n_\nu}}{n_\nu} \tag{E.2.19}$$

を得る．すなわち，各階数の密度行列に対応する AIC は，

$$\mathcal{A}^{(7)}(\theta) = -2\ln[P^{(7)}(n|\theta)] + 2\times 7, \tag{E.2.20}$$

$$\mathcal{A}^{(12)}(\theta) = -2\ln[P^{(12)}(n|\theta)] + 2\times 12, \tag{E.2.21}$$

$$\mathcal{A}^{(15)}(\theta) = -2\ln[P^{(15)}(n|\theta)] + 2\times 15, \tag{E.2.22}$$

$$\mathcal{A}^{(16)}(\theta) = -2\ln[P^{(16)}(n|\theta)] + 2\times 16 \tag{E.2.23}$$

である．各値を最小[*2]にするような θ と $\mathcal{A}^{(k)}(\theta)$ をそれぞれ計算し，最も小さい $\mathcal{A}^{(k)}(\theta)$ を与えるモデル $\hat{\rho}^{(k)}(\theta)$ にパラメータ θ を代入して $\hat{T}_\theta^{(k)}$ を求め，式 (E.2.13) を使って密度行列を再構築する．

[*2] $\mathcal{A}^{(k)}(\theta)$ の式では対数尤度関数に $-$ の符号がついており，それに定数を加えているため，あるモデルで AIC を最小にする θ はそのモデルで尤度関数を最大にする θ と一致する．

付録 F

エンタングルメントの評価手法

F.1 フィデリティー

本研究では，エンタングルメントの有無や “多次元性” を判定するために最大限エンタングルした状態に対するフィデリティーを用いている．この手法の妥当性を以下に示す．

F.1.1 シュミットランク

任意の 2 者間純粋状態 $|\psi\rangle$ は，基底をうまく選ぶと次のように書ける．

$$|\psi\rangle = \sum_{i=1}^{k} \sqrt{\lambda_i}\, |a_i\rangle \otimes |b_i\rangle\,. \tag{F.1.1}$$

ここで，k はシュミットランク (Schmidt rank; SR) と呼ばれ，部分トレースをとった密度行列 $\hat{\rho}_{\mathrm{red}} = \mathrm{Tr}_B\, |\psi\rangle\langle\psi|$ のランクである．純粋状態 $|\psi\rangle$ は $k = 1$ の場合に限り分離可能であり，$k \geq 2$ ならそのランクのエンタングルド状態である．

F.1.2 シュミットナンバー

次の条件を満たす k をシュミットナンバー (Schmidt number; SN) [87] と呼ぶ．

定義 1 (Schmidt number)**.** *2 者間混合状態 $\hat{\rho}$ の任意の確率的な分解 $\sum_i p_i\, |\psi_i\rangle\langle\psi_i|$ に対して，少なくとも 1 つの $|\psi_i\rangle$ の SR が最小でも k であり，すべての $\{|\psi_i\rangle\}$ の SR が高々 k である分解が存在するとき，かつその場合に限り $\hat{\rho}$ の SN は k である．*

SR を混合状態に拡張したものが SN である．

F.1.3　Schmidt-number Witnesses

$N \times M$ 系 ($N \leq M$ として一般性を失わない) の混合状態 $\hat{\rho}$ 全体の集合を S_M とする．

SN が k 以下である混合状態の集合を S_k とする．$S_1 \subset S_2 \subset \cdots \subset S_k \subset \cdots \subset S_M$ が成り立つ．

次の条件を満たすエルミート演算子 $\hat{W}$ を "Schmidt number k witness (k-SW)" [104] と呼ぶ．

定義 2 (Schmidt number k witness)**.** 任意の $\hat{\sigma} \in S_{k-1}$ に対して $\mathrm{Tr}(\hat{W}\hat{\sigma}) \geq 0$ であり，$\mathrm{Tr}(\hat{W}\hat{\rho}) < 0$ を満たすような $\hat{\rho} \in S_k$ が少なくとも *1* つ存在するとき，かつその場合に限りエルミート演算子 $\hat{W}$ は *k-SW* である．

F.1.4　閾値

$\{|i\rangle\}_{i=1}^{m}$ を H^m の正規直交基底とする．$H^m \otimes H^m$ の最大限エンタングルした状態を次のように定義する:

$$|\mathrm{MES}\rangle \equiv \frac{1}{\sqrt{m}} \sum_{i=1}^{m} e^{i\varphi_i} |i\rangle \otimes |i\rangle . \tag{F.1.2}$$

混合状態 $\hat{\rho} \in S_{k-1}$ ならば，次の不等式が成り立つ:

$$\langle \mathrm{MES}|\hat{\rho}|\mathrm{MES}\rangle \leq \frac{k-1}{m}. \tag{F.1.3}$$

換言すれば，k-SW が次のように与えられる:

$$\hat{W} = \frac{m}{k-1} |\mathrm{MES}\rangle\langle\mathrm{MES}| . \tag{F.1.4}$$

すなわち，もし $\langle \mathrm{MES}|\hat{\rho}|\mathrm{MES}\rangle > \frac{k-1}{m}$ ならば，$\rho \notin S_{k-1}$ である．これをエンタングルメントの有無，および多次元性の評価に用いる．

証明

補題 1. シュワルツの不等式 $|\langle u|v\rangle|^2 \leq \langle u|u\rangle \langle v|v\rangle$ は次の不等式と同値．

$$\left| \sum_{i=1}^{d} \alpha_i \beta_i \right|^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{d} |\alpha_i|^2 \right) \left(\sum_{i=1}^{d} |\beta_i|^2 \right). \tag{F.1.5}$$

ただし，$\{\alpha_i\}_{i=1}^{d}$，$\{\beta_i\}_{i=1}^{d}$ は複素数．

Proof. $\{|i\rangle\}_{i=1}^{d}$ を d 次元の正規直交基底とし，$|\alpha\rangle \equiv \sum_{i=1}^{d} \alpha_i^* |i\rangle$，$|\beta\rangle \equiv \sum_{i=1}^{d} \beta_i |i\rangle$ とすると，

$$|\langle\alpha|\beta\rangle|^2 = \left|\sum_{i=1}^{d} \alpha_i \beta_i\right|^2,$$
$$\langle\alpha|\alpha\rangle = \sum_{i=1}^{d} |\alpha_i|^2, \tag{F.1.6}$$
$$\langle\beta|\beta\rangle = \sum_{i=1}^{d} |\beta_i|^2.$$

より，確かに同値. □

補題 2. 任意の純粋状態 $|\Psi\rangle$ に対する混合状態 $\hat{\rho}$ のフィデリティー $\langle\Psi|\hat{\rho}|\Psi\rangle$ について，

$$\langle\Psi|\hat{\rho}|\Psi\rangle \leq |\langle\Psi|\varphi\rangle|^2 \tag{F.1.7}$$

を満たす純粋状態 $|\varphi\rangle$ が存在する.

Proof. 混合状態 $\hat{\rho}$ は純粋状態 $|\varphi_i\rangle$ を用いて次のように展開できる.

$$\hat{\rho} = \sum_i p_i |\varphi_i\rangle\langle\varphi_i| \tag{F.1.8}$$

ここで，$\sum_i p_i = 1$, $p_i \geq 0$ を満たす．したがって，

$$\langle\Psi|\hat{\rho}|\Psi\rangle = \sum_i p_i |\langle\Psi|\varphi_i\rangle|^2 \leq \max\left[|\langle\Psi|\varphi_i\rangle|^2\right] \equiv |\langle\Psi|\varphi\rangle|^2.$$

□

定理 1. $\{|i\rangle\}_{i=1}^{m}$ を H^m の正規直交基底とする．$H^m \otimes H^m$ の最大限エンタングルした状態を次のように定義する*:*

$$|\mathrm{MES}\rangle \equiv \frac{1}{\sqrt{m}} \sum_{i=1}^{m} e^{i\varphi_i} |i\rangle \otimes |i\rangle. \tag{F.1.9}$$

混合状態 $\hat{\rho} \in S_{k-1}$ ならば，次の不等式が成り立つ*:*

$$\langle\mathrm{MES}|\hat{\rho}|\mathrm{MES}\rangle \leq \frac{k-1}{m}. \tag{F.1.10}$$

換言すれば，*k-SW* が次のように与えられる*:*

$$\hat{W} = \frac{m}{k-1} |\mathrm{MES}\rangle\langle\mathrm{MES}|. \tag{F.1.11}$$

Proof. 補題 2 より，対応する純粋状態 $|\Phi\rangle$ について

$$|\langle\mathrm{MES}|\Phi\rangle|^2 \leq \frac{k-1}{d} \tag{F.1.12}$$

を示せば十分である．$|\Phi\rangle$ は次のようにおける．

$$|\Phi\rangle = \sum_{j=1}^{k-1} \gamma_j |\psi_j\rangle \otimes |\phi_j\rangle . \tag{F.1.13}$$

ここで，$\sum_{j=1}^{k-1} |\gamma_j|^2 = 1$ であり，

$$|\psi_j\rangle \equiv \sum_{m=1}^{d} \alpha_{jm} |m\rangle , \qquad |\phi_j\rangle \equiv \sum_{n=1}^{d} \beta_{jn} |n\rangle .$$

ただし，$\sum_{m=1}^{d} \alpha_{jm}^* \alpha_{j'm} = \sum_{n=1}^{d} \beta_{jn}^* \beta_{j'n} = \delta_{jj'}$ である．なお，$k-1$ 次元空間の正規直交基底 $\{|\varphi_j\rangle\}_{j=1}^{k-1}$ は正規非直交ベクトル $\{|\varphi_1\rangle, \{|m\rangle\}_{m=2}^{k-1}\}$ からシュミットの直交化法で作れる．$\{|\phi_j\rangle\}_{j=1}^{k-1}$ も同様である．

$$
\begin{aligned}
|\langle \mathrm{MES}|\Phi\rangle|^2 &= \left| \left(\frac{1}{\sqrt{d}} \sum_{i=1}^{d} e^{-i\varphi_i} \langle i| \otimes \langle i| \right) \left(\sum_{j=1}^{k-1} \gamma_j |\psi_j\rangle \otimes |\phi_j\rangle \right) \right|^2 \\
&= \frac{1}{d} \left| \sum_{i=1}^{d} \sum_{j=1}^{k-1} \gamma_j e^{-i\varphi_i} \langle i|\psi_j\rangle \langle i|\phi_j\rangle \right|^2 \\
&= \frac{1}{d} \left| \sum_{i=1}^{d} \sum_{j=1}^{k-1} \gamma_j e^{-i\varphi_i} \left(\sum_{m=1}^{d} \alpha_{jm}\delta_{im} \right) \left(\sum_{n=1}^{d} \beta_{jn}\delta_{in} \right) \right|^2 \\
&= \frac{1}{d} \left| \sum_{i=1}^{d} \sum_{j=1}^{k-1} \gamma_j e^{-i\varphi_i} \alpha_{ji}\beta_{ji} \right|^2 \\
&= \frac{1}{d} \left| \sum_{j=1}^{k-1} \left[\gamma_j e^{-i\varphi_i} \left(\sum_{i=1}^{d} \alpha_{ji}\beta_{ji} \right) \right] \right|^2 \\
&\leq \frac{1}{d} \left(\sum_{j=1}^{k-1} |\gamma_j e^{-i\varphi_i}|^2 \right) \left(\sum_{j=1}^{k-1} \left| \sum_{i=1}^{d} \alpha_{ji}\beta_{ji} \right|^2 \right) \\
&= \frac{1}{d} \sum_{j=1}^{k-1} \left| \sum_{i=1}^{d} \alpha_{ji}\beta_{ji} \right|^2 \\
&\leq \frac{1}{d} \sum_{j=1}^{k-1} \left(\sum_{i=1}^{d} |\alpha_{ji}|^2 \right) \left(\sum_{i=1}^{d} |\beta_{ji}|^2 \right) \\
&= \frac{k-1}{d}
\end{aligned}
$$

ただし，シュワルツの不等式を繰り返し用いた． □

F.1.5 エンタングルメントフィデリティーの下限推定値

2 次元 2 粒子の複合系が密度演算子 $\hat{\rho}$ で与えられているとする．

$|+\rangle \equiv (|0\rangle + |1\rangle)/\sqrt{2}$，$|-\rangle \equiv (|0\rangle - |1\rangle)/\sqrt{2}$，$|u\rangle \equiv (|0\rangle + i\,|1\rangle)/\sqrt{2}$，$|d\rangle \equiv (|0\rangle - i\,|1\rangle)/\sqrt{2}$，を考えて，これらを用いて次の 8 通りの光子計数を得たとする．

$$
\begin{aligned}
n_{++} &= N \cdot \mathrm{Tr}\left[|{++}\rangle\langle{++}|\,\hat{\rho}\right] \\
n_{+-} &= N \cdot \mathrm{Tr}\left[|{+-}\rangle\langle{+-}|\,\hat{\rho}\right] \\
n_{-+} &= N \cdot \mathrm{Tr}\left[|{-+}\rangle\langle{-+}|\,\hat{\rho}\right] \\
n_{--} &= N \cdot \mathrm{Tr}\left[|{--}\rangle\langle{--}|\,\hat{\rho}\right] \\
n_{uu} &= N \cdot \mathrm{Tr}\left[|uu\rangle\langle uu|\,\hat{\rho}\right] \\
n_{ud} &= N \cdot \mathrm{Tr}\left[|ud\rangle\langle ud|\,\hat{\rho}\right] \\
n_{du} &= N \cdot \mathrm{Tr}\left[|du\rangle\langle du|\,\hat{\rho}\right] \\
n_{dd} &= N \cdot \mathrm{Tr}\left[|dd\rangle\langle dd|\,\hat{\rho}\right]
\end{aligned}
$$

ここで，トレースの線形性から

$$n_{++} + n_{+-} + n_{-+} + n_{--} = N \cdot \mathrm{Tr}\left[\hat{\rho}\right] = N \tag{F.1.14}$$

$$n_{uu} + n_{ud} + n_{du} + n_{dd} = N \cdot \mathrm{Tr}\left[\hat{\rho}\right] = N \tag{F.1.15}$$

が成り立つので，

$$p \equiv \frac{n_{++} + n_{--}}{n_{++} + n_{+-} + n_{-+} + n_{--}} = \mathrm{Tr}\left[|{++}\rangle\langle{++}|\,\hat{\rho}\right] + \mathrm{Tr}\left[|{--}\rangle\langle{--}|\,\hat{\rho}\right] \tag{F.1.16}$$

$$q \equiv \frac{n_{ud} + n_{du}}{n_{uu} + n_{ud} + n_{du} + n_{dd}} = \mathrm{Tr}\left[|ud\rangle\langle ud|\,\hat{\rho}\right] + \mathrm{Tr}\left[|du\rangle\langle du|\,\hat{\rho}\right] \tag{F.1.17}$$

を定義できる．

一方で，次のベル基底

$$
\begin{aligned}
|A\rangle &= \left(|00\rangle + |11\rangle\right)/\sqrt{2} \\
|B\rangle &= \left(|00\rangle - |11\rangle\right)/\sqrt{2} \\
|C\rangle &= \left(|01\rangle + |10\rangle\right)/\sqrt{2} \\
|D\rangle &= \left(|01\rangle - |10\rangle\right)/\sqrt{2}
\end{aligned}
$$

を考えると，

$$
\begin{aligned}
|{++}\rangle &= \frac{1}{2}\left(|0\rangle + |1\rangle\right)\left(|0\rangle + |1\rangle\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|A\rangle + |C\rangle\right) \\
|{--}\rangle &= \frac{1}{2}\left(|0\rangle - |1\rangle\right)\left(|0\rangle - |1\rangle\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|A\rangle - |C\rangle\right) \\
|ud\rangle &= \frac{1}{2}\left(|0\rangle + i\,|1\rangle\right)\left(|0\rangle - i\,|1\rangle\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|A\rangle - i\,|D\rangle\right) \\
|du\rangle &= \frac{1}{2}\left(|0\rangle - i\,|1\rangle\right)\left(|0\rangle + i\,|1\rangle\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|A\rangle + i\,|D\rangle\right)
\end{aligned}
$$

と変形できて，

$$
\begin{aligned}
|{+}{+}\rangle\langle{+}{+}| + |{-}{-}\rangle\langle{-}{-}| &= |A\rangle\langle A| + |C\rangle\langle C| \\
|ud\rangle\langle ud| + |du\rangle\langle du| &= |A\rangle\langle A| + |D\rangle\langle D|
\end{aligned}
$$

が成り立つから，式 (F.1.16) は

$$
p = \mathrm{Tr}\left[|A\rangle\langle A|\,\hat{\rho}\right] + \mathrm{Tr}\left[|C\rangle\langle C|\,\hat{\rho}\right] \tag{F.1.18}
$$

$$
q = \mathrm{Tr}\left[|A\rangle\langle A|\,\hat{\rho}\right] + \mathrm{Tr}\left[|D\rangle\langle D|\,\hat{\rho}\right] \tag{F.1.19}
$$

とそれぞれ変形される．$|A\rangle$，$|B\rangle$，$|C\rangle$，$|D\rangle$ は完全系を成すことから，

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Tr}\left[\hat{\rho}\right] &= \mathrm{Tr}\left[(|A\rangle\langle A| + |B\rangle\langle B| + |C\rangle\langle C| + |D\rangle\langle D|)\hat{\rho}\right] \\
&= \mathrm{Tr}\left[|A\rangle\langle A|\,\hat{\rho}\right] + \mathrm{Tr}\left[|B\rangle\langle B|\,\hat{\rho}\right] + \mathrm{Tr}\left[|C\rangle\langle C|\,\hat{\rho}\right] + \mathrm{Tr}\left[|D\rangle\langle D|\,\hat{\rho}\right]
\end{aligned} \tag{F.1.20}
$$

が成り立ち，$\mathrm{Tr}[\hat{\rho}] = 1$，$\mathrm{Tr}[|B\rangle\langle B|\,\hat{\rho}] \geq 0$ に注意すれば

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Tr}\left[|A\rangle\langle A|\,\hat{\rho}\right] + \mathrm{Tr}\left[|C\rangle\langle C|\,\hat{\rho}\right] + \mathrm{Tr}\left[|D\rangle\langle D|\,\hat{\rho}\right] &= 1 - \mathrm{Tr}[|B\rangle\langle B|\,\hat{\rho}] \leq 1 \\
\mathrm{Tr}\left[|A\rangle\langle A|\,\hat{\rho}\right] + \mathrm{Tr}\left[|C\rangle\langle C|\,\hat{\rho}\right] + \mathrm{Tr}\left[|D\rangle\langle D|\,\hat{\rho}\right] + \mathrm{Tr}\left[|A\rangle\langle A|\,\hat{\rho}\right] &\leq 1 + \mathrm{Tr}\left[|A\rangle\langle A|\,\hat{\rho}\right] \\
p + q &\leq 1 + \mathrm{Tr}\left[|A\rangle\langle A|\,\hat{\rho}\right] \\
\mathrm{Tr}\left[|A\rangle\langle A|\,\hat{\rho}\right] = \langle A|\hat{\rho}|A\rangle &\geq p + q - 1
\end{aligned}
$$

を得る．対象となる状態がエンタングルしているための十分条件は $F > 0.5$ であるから，$F \geq F_{\min} = p + q - 1 > 0.5$ を示せばエンタングルメントの存在が明らかになる．

同様の閾値をシュミットランク 3 のエンタングルメントに対しても設定できる．証明は割愛するが，$\alpha = \exp(i2\pi/3)$ に対して

$$
\begin{aligned}
|\psi_j^k\rangle &\equiv |\phi_j^k\rangle \otimes |\phi_j^k\rangle^* \\
&= \frac{1}{3}(|0\rangle + \alpha^{j+k}\,|1\rangle + \alpha^{j+2k}\,|2\rangle) \otimes (|0\rangle + \alpha^{-(j+k)}\,|1\rangle + \alpha^{-(j+2k)}\,|2\rangle)
\end{aligned} \tag{F.1.21}
$$

で定義される状態について，同じ j に対する

$$
p_j = \mathrm{Tr}[|\psi_j^0\rangle\langle\psi_j^0|] + \mathrm{Tr}[|\psi_j^1\rangle\langle\psi_j^1|] + \mathrm{Tr}[|\psi_j^2\rangle\langle\psi_j^2|] \tag{F.1.22}
$$

が測定可能な量で，シュミットランク 3 の最大エンタングルド状態 $|E\rangle = (|00\rangle + |11\rangle + |22\rangle)/\sqrt{3}$ に対して次の不等式が成り立つ:

$$
\langle E|\rho|E\rangle \geq \frac{-1 + \sum_{i=0}^{2} p_i}{2}. \tag{F.1.23}
$$

F.2　エンタングルメントオブフォーメーション

本節では，部分系 A，B からなる量子状態のエンタングルメントの度合いを定量化する方法について議論する．対象となる系が純粋状態である場合には，いずれかの部分系のフォン・ノイマンエントロピーが良い指標となる．一方で，対象となる系が混合状態である場合には，状態を純粋状態のアンサンブルに分解して求めたエントロピーの加重平均について，可能なすべての分解に対する最小値として定義されたエンタングルメントオブフォーメーション (EoF; Entanglement Of Formation) が指標となる [16,17]．また，この量を解析的に計算する手法が Wootters により提案され [18]，広く用いられている．

F.2.1　エントロピー

フォン・ノイマンエントロピー

ある量子状態 $\hat{\rho}$ のエントロピーを，

$$S(\hat{\rho}) \equiv -\mathrm{Tr}\left[\hat{\rho}\log_2\hat{\rho}\right] \tag{F.2.1}$$

で定義する [3]．ここで，λ_x が $\hat{\rho}$ の固有値ならば，

$$S(\hat{\rho}) = -\sum_x \lambda_x \log_2 \lambda_x \tag{F.2.2}$$

と書き直せる．なお，$0\log_2 0 = 0$ とする．$\hat{\rho}$ が純粋状態ならば，明らかに $S(\hat{\rho}) = 0$ である．また，$\hat{\rho}$ の固有値は確率としての意味を持つことから 0 以上 1 以下でなければならないので，$S(\hat{\rho}) \geq 0$ も明らかである．

$\hat{\rho}$ と $\hat{\sigma}$ をそれぞれ密度演算子とすると，$\hat{\rho}$ と $\hat{\sigma}$ の相対エントロピーを次のように定義できる．

$$S(\hat{\rho}||\hat{\sigma}) \equiv \mathrm{Tr}\left[\hat{\rho}\log_2\hat{\rho}\right] - \mathrm{Tr}\left[\hat{\rho}\log_2\hat{\sigma}\right] \tag{F.2.3}$$

今，$\hat{\rho} = \sum_i p_i \left|i\right\rangle\!\left\langle i\right|$，$\hat{\sigma} = \sum_j q_j \left|j\right\rangle\!\left\langle j\right|$ と直交基底で展開したとすると，相対エントロピーは

$$S(\hat{\rho}||\hat{\sigma}) = \sum_i p_i \log_2 p_i - \sum_i \left\langle i\right|\hat{\rho}\log_2\hat{\sigma}\left|i\right\rangle \tag{F.2.4}$$

と書き下せる．$\hat{\rho} = \sum_i p_i \ket{i}\bra{i}$ から $\bra{i}\hat{\rho} = p_i \bra{i}$ が成り立つので，

$$\begin{aligned}
\sum_i \langle i|\hat{\rho}\log_2 \hat{\sigma}|i\rangle &= \sum_i p_i \langle i| \left(\sum_j \log_2(q_j) \ket{j}\bra{j} \right) \ket{i} \\
&= \sum_i p_i \sum_j \log_2(q_j) \langle i|j\rangle\langle j|i\rangle \\
&\equiv \sum_i p_i \sum_j P_{ij} \log_2 q_j
\end{aligned} \tag{F.2.5}$$

と変形できる．$P_{ij} \equiv \langle i|j\rangle\langle j|i\rangle \geq 0$ が成り立つ．これを式 (F.2.4) に代入すると，

$$S(\hat{\rho}||\hat{\sigma}) = \sum_i p_i \left(\log_2 p_i - \sum_j P_{ij} \log_2 q_j \right) \tag{F.2.6}$$

を得る．

ここで，$\log_2 x$ は単調に増加する凹関数であることから，$r_i \equiv \sum_j P_{ij} q_j$ として

$$\sum_j P_{ij} \log_2 q_j \leq \log_2 r_i \tag{F.2.7}$$

が成り立つことに注意すると，式 (F.2.6) から

$$S(\hat{\rho}||\hat{\sigma}) \geq -\sum_i p_i \log_2 \frac{r_i}{p_i} \tag{F.2.8}$$

を得る．等号成立条件はそれぞれの i に対して $P_{ij} = 1$ を満たす j が存在することである．ラベルの付け方を適当に直せば，一般性を失わずに P_{ij} を単位行列とみなせる．すなわち，$\hat{\rho}$ と $\hat{\sigma}$ とが同じ直交基底で対角化されることになる．

続いて，$x > 0$ なる任意の x に対して，$\log_2 x \ln 2 = \ln x \leq x - 1$ から $-\log_2 x \geq (1-x)/\ln 2$(等号成立は $x = 1$) が成り立つことを用いれば，式 (F.2.8) は次のように変形される．

$$\begin{aligned}
S(\hat{\rho}||\hat{\sigma}) &\geq -\sum_i p_i \log_2 \frac{r_i}{p_i} \\
&\geq \frac{1}{\ln 2} \sum_i p_i \left(1 - \frac{r_i}{p_i} \right) \\
&= \frac{1}{\ln 2} \left(\sum_i p_i - \sum_i r_i \right) \\
&= \frac{1}{\ln 2} \left(1 - \sum_i \sum_j P_{ij} q_j \right) \geq 0
\end{aligned} \tag{F.2.9}$$

等号成立条件は，$p_i = r_i$ である．既に述べたように，P_{ij} が単位行列とみなせて $\hat{\rho}$ と $\hat{\sigma}$ とが同じ直交基底で対角化されている状況で $p_i = r_i$ を要請すれば，対応する固有値も $\hat{\rho}$ と $\hat{\sigma}$ とで等しくなる．すなわち，$\hat{\rho} = \hat{\sigma}$ が全体の等号成立条件であるといえる．

今，$\sigma \equiv \hat{I}/d$，すなわち d 次元の完全な混合状態であるとすると，

$$\begin{aligned} 0 \leq S(\hat{\rho}||\hat{I}/d) &= \mathrm{Tr}\left[\hat{\rho}\log_2\hat{\rho}\right] - \mathrm{Tr}\left[\hat{\rho}\log_2\frac{\hat{I}}{d}\right] \\ &= -S(\hat{\rho}) - \mathrm{Tr}\left[\hat{\rho}\right]\log_2\frac{1}{d} \\ &= -S(\hat{\rho}) + \log_2 d \end{aligned} \tag{F.2.10}$$

が成り立つので，$S(\hat{\rho}) \leq \log_2 d$ が成り立つ．以上から，

$$0 \leq S(\hat{\rho}) \leq \log_2 d \tag{F.2.11}$$

が示された．なお，等号成立条件を加味すれば，

$$S(\hat{\rho}) = 0 \rightarrow \hat{\rho}\text{は純粋状態であるから}\hat{\rho} = |\psi\rangle\langle\psi|$$

$$S(\hat{\rho}) = \log_2 d \rightarrow \hat{\rho}\text{は完全な混合状態であるから}\hat{\rho} = \frac{\hat{I}}{d}$$

がそれぞれ成り立つこともわかる．

エンタングルメントエントロピー

2 次元の部分系 A，B からなる複合系の状態 $\hat{\rho} \equiv |\psi\rangle\langle\psi|$ を考える．部分系 B について部分トレースをとった状態 $\hat{\rho}_A$ を，

$$\hat{\rho}_A \equiv \mathrm{Tr}_B\left[\hat{\rho}\right] \tag{F.2.12}$$

で定義する．$\hat{\rho}_A$ のエントロピー $S(\hat{\rho}_A)$ はエンタングルメントエントロピーと呼ばれ，$|\psi\rangle$ におけるエンタングルメントの度合いの指標として使われる．すなわち，エンタングルエントロピー $E(|\psi\rangle)$ は

$$E(|\psi\rangle) \equiv S(\hat{\rho}_A) = -\mathrm{Tr}\left[\hat{\rho}_A\log_2\hat{\rho}_A\right](= S(\hat{\rho}_B)) \tag{F.2.13}$$

である．

今，$|\psi\rangle = \cos\theta\,|0_A\rangle \otimes |0_B\rangle + e^{i\varphi}\sin\theta\,|1_A\rangle \otimes |1_B\rangle$ で表されるような純粋状態を考える．この状態に対して計算されるエンタングルメントエントロピーは，

$$E(|\psi\rangle) = -\cos^2\theta\log_2\cos^2\theta - \sin^2\theta\log_2\sin^2\theta \tag{F.2.14}$$

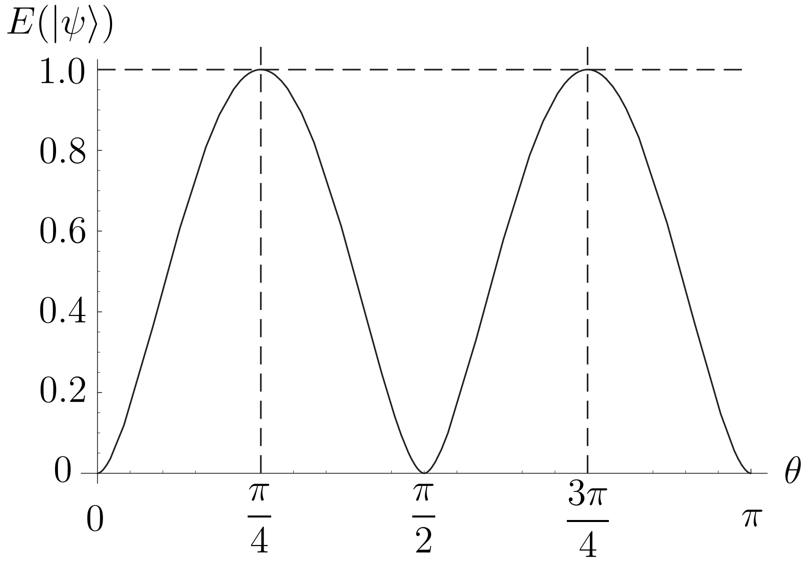

図 F.1　$|\psi\rangle \equiv \cos\theta\,|0_A\rangle \otimes |0_B\rangle + e^{i\varphi}\sin\theta\,|1_A\rangle \otimes |1_B\rangle$ のエンタングルメントエントロピー

であり，$0 \leq \theta \leq \pi$ で図示すると図 F.1 のようになる．

$\cos\theta$，$\sin\theta$ のいずれか一方が 0 になるような $\theta = 0, \pi/2, \pi$ で $E(|\psi\rangle)$ は 0 となるが，これは $\hat{\rho} \equiv |\psi\rangle\langle\psi|$ が部分系 A，B の状態の直積で書ける場合に対応している．また，$\theta = \pi/4, 3\pi/4$ で $E(|\psi\rangle)$ は 1 となるが，これは最大限エンタングルした状態に対応している．$0 < E(|\psi\rangle) < 1$ であるような状態は部分的にエンタングルした状態と呼ばれる．これらは，前節の結果を合わせるとより直感的に理解できる．すなわち[*1]，

$$
\begin{aligned}
E(|\psi\rangle) = S(\hat{\rho_A}) = 0 &\to \hat{\rho_A}\text{は純粋状態であるから}\hat{\rho_A} = |0_A\rangle\langle 0_A| \\
&\to \hat{\rho} = |0_A\rangle\langle 0_A| \otimes |0_B\rangle\langle 0_B| \\
E(|\psi\rangle) = S(\hat{\rho}_A) = \log_2 2 = 1 &\to \hat{\rho}_A\text{は完全な混合状態であるから}\hat{\rho}_A = \frac{\hat{I}_A}{2} \\
&\to |\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0_A\rangle \otimes |0_B\rangle + e^{i\varphi}\,|1_A\rangle \otimes |1_B\rangle\right)
\end{aligned}
$$

が成り立ち，部分的にエンタングルした状態に対して $0 < E(|\psi\rangle) < 1$ もこれらから推測できる．

$E(|\psi\rangle)$ は，$|\psi\rangle$ を局所操作と古典情報の通信を用いて作り出すのに必要な最大限エンタングルした状態の個数に対応している．

[*1] この記述はもとの状態が純粋状態であることからの類推でしかない．あまり意味はないが，矛盾が生じないことを示している程度である．なお，$\hat{I}_A = |0_A\rangle\langle 0_A| + |1_A\rangle\langle 1_A|$.

F.2.2　混合状態の EoF

EoF の定義

与えられた混合状態 $\hat{\rho}$ を，純粋状態で展開することを考える．適当な純粋状態のアンサンブル $\{|\psi_i\rangle\}$ を用意すれば，

$$\hat{\rho} = \sum_i p_i |\psi\rangle\langle\psi| \tag{F.2.15}$$

と展開できる．展開基底はそれぞれ純粋状態であるから，エンタングルメントエントロピーを用いてエンタングルメントの度合いを評価することができる．しかし，純粋状態による展開の仕方は 1 通りには定まらず，無数に存在する．そこで，

$$E(\hat{\rho}) \equiv \min \sum_i p_i E(|\psi_i\rangle) \tag{F.2.16}$$

を混合状態 $\hat{\rho}$ の EoF として定義する．ここで，min は可能なあらゆる展開基底により求めた $\sum_i p_i E(|\psi_i\rangle)$ から最低値を与えるものを抽出する操作を意味している．

EoF は，局所操作と古典情報の通信を用いて混合状態 $\hat{\rho}$ を作り出すために必要な最大限エンタングルした状態の個数を意味している．

解析的な計算方法

混合状態を展開する基底は無数に取れるので，一般の密度行列から前節に示した定義を用いて直接 EoF を評価するのは困難である．本節では，これを解析的に計算する方法について示す．

2 次元の部分系 A，B からなる複合系の状態が純粋状態で $|\psi\rangle$ で表されるとすると，この状態は次のベル基底

$$\begin{aligned}
|e_1\rangle &= (|00\rangle + |11\rangle)/\sqrt{2}, \\
|e_2\rangle &= (|00\rangle - |11\rangle)/\sqrt{2}, \\
|e_3\rangle &= (|01\rangle + |10\rangle)/\sqrt{2}, \\
|e_4\rangle &= (|01\rangle - |10\rangle)/\sqrt{2},
\end{aligned} \tag{F.2.17}$$

と複素数 α_i を用いて

$$|\psi\rangle = \sum_i \alpha_i |e_i\rangle \tag{F.2.18}$$

と展開できる．$\sum_i |\alpha|^2 = 1$ を満たす．ここで，例えば $|01\rangle$ は，部分系 A の状態を $|0_A\rangle$，部分系 B の状態を $|1_B\rangle$ と表したとき，$|01\rangle \equiv |0_A\rangle \otimes |1_B\rangle$ と定義される．その他も同様である．

$\hat{\rho}_A \equiv \mathrm{Tr}_B\left[|\psi\rangle\langle\psi|\right]$ を計算すると，$\beta_1 \equiv \alpha_1 + \alpha_2$，$\beta_2 \equiv \alpha_1 - \alpha_2$，$\beta_3 \equiv \alpha_3 + \alpha_4$，$\beta_4 \equiv \alpha_3 - \alpha_4$ を用いて

$$\begin{aligned}\hat{\rho}_A =& \frac{|\beta_1|^2 + |\beta_3|^2}{2}|0\rangle\langle 0| + \frac{\beta_1\beta_4^* + \beta_2^*\beta_3}{2}|0\rangle\langle 1| \\ &+ \frac{\beta_1^*\beta_4 + \beta_2\beta_3^*}{2}|1\rangle\langle 0| + \frac{|\beta_2|^2 + |\beta_4|^2}{2}|1\rangle\langle 1|\end{aligned} \tag{F.2.19}$$

と書ける．ここで，$\sum_i |\beta|^2 = 2\sum_i |\alpha|^2 = 2$ である．

$p \equiv \left(|\beta_1|^2 + |\beta_3|^2\right)/2$，$q \equiv \left(\beta_1\beta_4^* + \beta_2^*\beta_3\right)/2$ とおけば，固有値 $\lambda_\pm$ は

$$\lambda_\pm = \frac{1 \pm \sqrt{1 - \{4p(1-p) - 4|q|^2\}}}{2} \tag{F.2.20}$$

で与えられる．

$$h(x) \equiv -x\log_2 x - (1-x)\log_2(1-x) \tag{F.2.21}$$

を用いれば，$\lambda_- = 1 - \lambda_+$ に注意して，エンタングルメントエントロピーを

$$E(|\psi\rangle) = S(\hat{\rho}_A) = h(\lambda_+) \tag{F.2.22}$$

と書ける．式 (F.2.20) は実数 $4p(1-p) - 4|q|^2$ の関数で書けており，対象となる状態に対してこの値を求めればエントロピーを計算できることがわかる．そこで，$C^2 \equiv 4p(1-p) - 4|q|^2$ とおき，コンカレンス (C; Concurrence) と呼ぶ[*2]．

$$\begin{aligned}C^2 &= 4p(1-p) - 4|q|^2 \\ &= 2p\cdot 2(1-p) - |2q|^2 \\ &= \left(|\beta_1|^2 + |\beta_3|^2\right)\left(|\beta_2|^2 + |\beta_4|^2\right) - |\beta_1\beta_4^* + \beta_2^*\beta_3|^2 \\ &= |\beta_1\beta_2|^2 + |\beta_3\beta_4|^2 - \beta_1\beta_2\beta_3^*\beta_4^* - \beta_1\beta_2\beta_3^*\beta_4^* \\ &= |\beta_1\beta_2 - \beta_3\beta_4|^2 \\ &= |(\alpha_1+\alpha_2)(\alpha_1-\alpha_2) - (\alpha_3+\alpha_4)(\alpha_3-\alpha_4)|^2 \\ &= |\alpha_1^2 - \alpha_2^2 - \alpha_3^2 + \alpha_4^2|^2\end{aligned} \tag{F.2.23}$$

であるから，$C \equiv |-\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3 - \alpha_4^2|$ と定義すればよい．

[*2] C^2 はタングル (Tangle) と呼ばれる．コンカレンスやタングルの物理的な意味は別として，いずれもエンタングルメントの度合いを表す量である．

ここで，次の演算子 $\hat{\Sigma}$ を定義する．パウリ行列 $\hat{\sigma}_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$ に対して[*3]，

$$\hat{\Sigma} \equiv \hat{\sigma}_{2(A)} \otimes \hat{\sigma}_{2(B)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{F.2.24}$$

なお，この演算子は次のように状態を変える．

$$\begin{aligned} \hat{\Sigma}\,|00\rangle &= -\,|11\rangle \\ \hat{\Sigma}\,|01\rangle &= |10\rangle \\ \hat{\Sigma}\,|10\rangle &= |01\rangle \\ \hat{\Sigma}\,|11\rangle &= -\,|00\rangle \end{aligned}$$

したがって，式 (F.2.17) のベル基底 $\{|e_i\rangle\}_{i=1}^4$ に対して，$\hat{\Sigma}\,|e_i\rangle$ を定義すれば，

$$\begin{aligned} \hat{\Sigma}\,|e_1\rangle &= -\,|e_1\rangle \\ \hat{\Sigma}\,|e_2\rangle &= |e_2\rangle \\ \hat{\Sigma}\,|e_3\rangle &= |e_3\rangle \\ \hat{\Sigma}\,|e_4\rangle &= -\,|e_4\rangle \end{aligned}$$

とそれぞれ計算できる．

以上から，対象となる状態 $|\psi\rangle$ の複素共役をとって $\hat{\Sigma}$ を作用させた状態を $|\tilde{\psi}\rangle \equiv \hat{\Sigma}\,|\psi^*\rangle$ と定義すれば，

$$C = |-\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3 - \alpha_4^2| = |\,\langle\psi|\tilde{\psi}\rangle\,| \tag{F.2.25}$$

と書けることがわかる．

---

*3　$|0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$，$|1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ という基底を用いている．

以上をまとめれば，純粋状態 $|\psi\rangle$ のエンタングルメントエントロピー $E(|\psi\rangle)$ は

$$
\begin{aligned}
E(|\psi\rangle) &= h\left(\frac{1+\sqrt{1-C^2}}{2}\right) \\
\text{where} \quad & h(x) = -x\log_2 x - (1-x)\log_2(1-x) \\
& C = |\langle\psi|\tilde{\psi}\rangle| \\
& |\tilde{\psi}\rangle = \hat{\Sigma}\,|\psi^*\rangle \\
& \hat{\Sigma} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}
\tag{F.2.26}
$$

で与えられる．

純粋状態の場合の結果を混合状態の場合に拡張する方法を考える．このためには，コンカレンス C を与えられた混合状態に対して計算できればよいと予想される．$|\tilde{\psi}\rangle = \hat{\Sigma}\,|\psi^*\rangle$ に対応する変換を，$\hat{\rho} = |\psi\rangle\langle\psi|$ に拡張すると，

$$
\tilde{\rho} \equiv \hat{\Sigma}\hat{\rho}^*\hat{\Sigma} \tag{F.2.27}
$$

を得る．

任意の混合状態 $\hat{\rho}$ について同様に $\tilde{\rho}$ を定義できて，これを用いてエルミート行列 $\hat{\Lambda} \equiv \sqrt{\sqrt{\rho}\tilde{\rho}\sqrt{\rho}}$ を定義すれば，対象となる状態 $\hat{\rho}$ に対する EoF である $E(\hat{\rho})$ が次のように与えられる．

$$
\begin{aligned}
E(\hat{\rho}) &= h\left(\frac{1+\sqrt{1-C^2}}{2}\right) \\
\text{where} \quad & h(x) = -x\log_2 x - (1-x)\log_2(1-x) \\
& C = \max\{0, \lambda_1-\lambda_2-\lambda_3-\lambda_4\} \\
& \lambda_i\text{s are the eigenvalues of } \hat{\Lambda} \text{ in decreasing order.} \\
& \hat{\Lambda} = \sqrt{\sqrt{\hat{\rho}}\tilde{\rho}\sqrt{\hat{\rho}}} \\
& \tilde{\rho} = \hat{\Sigma}\hat{\rho}^*\hat{\Sigma} \\
& \hat{\Sigma} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}
\tag{F.2.28}
$$

証明は [18] を参照．なお，λ_i は $\hat{R} \equiv \hat{\rho}\tilde{\rho}$ の固有値の平方根と一致する．

誤差評価

光子計数値の誤差の，EoF に対する影響を伝播誤差として計算する方法を考える．本節の内容は，[74] で議論されている通りである．

密度行列はエルミートなので，$\hat{\rho}^* = \hat{\rho}^T$ が成り立つ．なお，上付き文字の T は行列を転置することを意味する．したがって，

$$\hat{R} = \hat{\rho}\tilde{\rho} = \hat{\rho}\hat{\Sigma}\hat{\rho}^T\hat{\Sigma}. \tag{F.2.29}$$

式 (E.1.39) を規格化された光子計数値 $\{s_i = n_i/N\}_{i=0}^{15}$ を用いて書けば，

$$\hat{\rho} = \sum_{\mu=0}^{15} \hat{M}_\mu s_\mu \tag{F.2.30}$$

であり，これを式 (F.2.29) に代入すれば

$$\begin{aligned}
\hat{R} &= \left(\sum_{\mu=0}^{15} \hat{M}_\mu s_\mu\right) \hat{\Sigma} \left(\sum_{\nu=0}^{15} \hat{M}_\nu^T s_\nu\right) \hat{\Sigma} \\
&= \sum_{\mu=0}^{15}\sum_{\nu=0}^{15} \left(\hat{M}_\mu \hat{\Sigma} \hat{M}_\nu^T \hat{\Sigma}\right) s_\mu s_\nu \\
&= \frac{1}{2}\left(\sum_{\mu=0}^{15}\sum_{\nu=0}^{15} \left(\hat{M}_\mu \hat{\Sigma} \hat{M}_\nu^T \hat{\Sigma}\right) s_\mu s_\nu + \sum_{\mu=0}^{15}\sum_{\nu=0}^{15} \left(\hat{M}_\nu \hat{\Sigma} \hat{M}_\mu^T \hat{\Sigma}\right) s_\nu s_\mu\right) \\
&\equiv \frac{1}{2}\sum_{\mu=0}^{15}\sum_{\nu=0}^{15} \hat{q}_{\mu\nu} s_\mu s_\nu, \qquad \text{(F.2.31)} \\
&\text{where} \quad \hat{q}_{\mu\nu} \equiv \hat{M}_\mu \hat{\Sigma} \hat{M}_\nu^T \hat{\Sigma} + \hat{M}_\nu \hat{\Sigma} \hat{M}_\mu^T \hat{\Sigma}
\end{aligned}$$

を得る．$\hat{R}$ はエルミート行列でないので，同じ固有値 r_a に対して左右で異なる固有ベクトル $\langle\xi_a|$，$|\zeta_a\rangle$ を取る．すなわち，

$$\begin{aligned}
\langle\xi_a|\,\hat{R} &= r_a \langle\xi_a| \\
\hat{R}\,|\zeta_a\rangle &= r_a |\zeta_a\rangle .
\end{aligned}$$

これらの固有ベクトルは，$\langle\xi_a|\zeta_b\rangle = \delta_{ab}$ を満たすよう選べて，以下ではこのように選んだ

ものとして議論する．固有値 r_a を r_1 から大きい順にとれば，コンカレンスは

$$\begin{aligned}
C &= \max\{0, \sqrt{r_1} - \sqrt{r_2} - \sqrt{r_3} - \sqrt{r_4}\} \\
&= \max\left\{0, \sum_{a=1}^{4} \mathrm{sgn}\left(\frac{3}{2} - a\right)\sqrt{r_a}\right\} \\
&\text{where} \quad \mathrm{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & \text{if} \quad x > 0 \\ -1 & \text{if} \quad x < 0 \end{cases}
\end{aligned} \tag{F.2.32}$$

で与えられる．

今，$\{s_i\}_{i=0}^{15}$ に対応する誤差 $\{\delta s_i\}_{i=0}^{15}$ が既知であるとして，コンカレンスへの伝播誤差

$$\delta C = \sqrt{\sum_{\nu=0}^{15}\left(\frac{\partial C}{\partial s_\nu}\right)^2 (\delta s_\nu)^2} \tag{F.2.33}$$

を計算したい．$C \neq 0$ のとき，

$$\frac{\partial C}{\partial s_\nu} = \sum_{a=1}^{4} \mathrm{sgn}\left(\frac{3}{2} - a\right)\frac{1}{2\sqrt{r_a}}\frac{\partial r_a}{\partial s_\nu}. \tag{F.2.34}$$

$\dfrac{\partial r_a}{\partial s_\nu}$ を評価するにあたっては，エルミートでない行列に関する摂動理論を用いなければならない．

$\hat{R}_\lambda \equiv \hat{R}_0 + \lambda \cdot \delta\hat{R}$ に関して，非摂動行列 $\hat{R}_0$ の固有値と左右の固有ベクトルが既知であるとする．すなわち，

$$\begin{aligned}
\langle\xi_a|\, \hat{R}_0 &= r_a \langle\xi_a| \\
\hat{R}_0 \,|\zeta_a\rangle &= r_a \,|\zeta_a\rangle\,, \\
\text{where} \quad &\langle\xi_a|\zeta_b\rangle = \delta_{ab}.
\end{aligned} \tag{F.2.35}$$

真の固有値 r'_a，左右の固有ベクトル $\langle\xi'_a|$，$|\zeta'_a\rangle$ は λ の冪で展開できて，

$$\begin{aligned}
r'_a &= \sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i r_a^{(i)} \\
\langle\xi'_a| &= \sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i \langle\xi_a^{(i)}| \\
|\zeta'_a\rangle &= \sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i \,|\zeta_a^{(i)}\rangle
\end{aligned} \tag{F.2.36}$$

と書ける．左固有値方程式 $\langle\xi'_a|\, \hat{R}_\lambda = r'_a \langle\xi'_a|$ について，λ の 0 次，1 次に関してそれぞれ次の式がなりたつ．

$$\langle\xi_a^{(0)}|\, \hat{R}_0 = r_a^{(0)} \langle\xi_a^{(0)}|\,, \tag{F.2.37}$$

$$\langle\xi_a^{(1)}|\left(\hat{R}_0 - r_a^{(0)}\hat{I}\right) = -\langle\xi_a^{(0)}|\left(\delta\hat{R} - r_a^{(1)}\right). \tag{F.2.38}$$

同様に，右固有値方程式 $\hat{R}_\lambda|\zeta'_a\rangle = r'_a|\zeta'_a\rangle$ について，λ の 0 次，1 次に関してそれぞれ次の式がなりたつ.

$$\hat{R}_0|\zeta_a^{(0)}\rangle = r_a^{(0)}|\zeta_a^{(0)}\rangle, \tag{F.2.39}$$

$$\left(\hat{R}_0 - r_a^{(0)}\hat{I}\right)|\zeta_a^{(1)}\rangle = -\left(\delta\hat{R} - r_a^{(1)}\right)|\zeta_a^{(0)}\rangle. \tag{F.2.40}$$

式 (F.2.35)，(F.2.37)，(F.2.39) から，

$$\begin{aligned}\langle\xi_a^{(0)}| &= \langle\xi_a|, \\ |\zeta_a^{(0)}\rangle &= |\zeta_a\rangle, \\ r_a^{(0)} &= r_a,\end{aligned} \tag{F.2.41}$$

がそれぞれ成り立つとわかる．したがって，式 (F.2.38) の右から $|\zeta_a\rangle$ を作用させれば,

$$\begin{aligned}(\text{右辺}) &= \langle\xi_a^{(1)}|\left(\hat{R}_0 - r_a\hat{I}\right)|\zeta_a\rangle \\ &= \langle\xi_a^{(1)}|(r_a - r_a)|\zeta_a\rangle \\ &= 0\end{aligned} \tag{F.2.42}$$

$$\begin{aligned}(\text{左辺}) &= -\langle\xi_a|\left(\delta\hat{R} - r_a^{(1)}\right)|\zeta_a\rangle \\ &= \langle\xi_a|r_a^{(1)}|\zeta_a\rangle - \langle\xi_a|\delta\hat{R}|\zeta_a\rangle \\ &= r_a^{(1)} - \langle\xi_a|\delta\hat{R}|\zeta_a\rangle\end{aligned} \tag{F.2.43}$$

より,

$$r_a^{(1)} = \langle\xi_a|\delta\hat{R}|\zeta_a\rangle \tag{F.2.44}$$

を得る．$\delta r_a \equiv r'_a - r_a \sim r_a^{(1)} = \langle\xi_a|\delta\hat{R}|\zeta_a\rangle$ より，両辺を δs_ν で割って $\delta s_\nu \to 0$ の極限をとれば

$$\frac{\partial r_a}{\partial s_\nu} = \langle\xi_a|\frac{\partial\hat{R}}{\partial s_\nu}|\zeta_a\rangle. \tag{F.2.45}$$

ここで，式 (F.2.31) を代入すれば,

$$\frac{\partial r_a}{\partial s_\nu} = \frac{1}{2}\sum_{\mu=0}^{15}\langle\xi_a|\hat{q}_{\mu\nu}s_\mu|\zeta_a\rangle \tag{F.2.46}$$

であり，続いて式 (F.2.34) に代入すれば

$$\frac{\partial C}{\partial s_\nu} = \sum_{a=1}^{4}\sum_{\mu=0}^{15} \mathrm{sgn}\left(\frac{3}{2} - a\right)\frac{1}{4\sqrt{r_a}}\langle \xi_a | \hat{q}_{\mu\nu} s_\mu | \zeta_a \rangle \tag{F.2.47}$$

を得る．これを式 (F.2.33) に代入すれば,

$$\delta C = \sqrt{\sum_{\nu=0}^{15}\left[\sum_{a=1}^{4}\sum_{\mu=0}^{15} \mathrm{sgn}\left(\frac{3}{2} - a\right)\frac{1}{4\sqrt{r_a}}\langle \xi_a | \hat{q}_{\mu\nu} s_\mu | \zeta_a \rangle\right]^2 (\delta s_\nu)^2}. \tag{F.2.48}$$

EoF はコンカレンス C の関数として $E(\hat{\rho}) = h\left(\frac{1+\sqrt{1-C^2}}{2}\right)$ で与えられるから，$h'(x) \equiv \frac{\mathrm{d}h(x)}{\mathrm{d}x}$ を用いて，EoF の誤差 δE は

$$\delta E = \frac{C}{\sqrt{1-C^2}} h'\left(\frac{1+\sqrt{1-C^2}}{2}\right)\delta C \tag{F.2.49}$$

と計算できる．

付録 G

技術的な詳細

G.1 光源

G.1.1 半導体レーザー

本研究では，外部共振器付き半導体レーザーを自作し，^{87}Rb の様々な光学遷移に周波数ロックして利用した.

外部共振器

半導体レーザー (LD) は，CD や DVD，プリンター，光通信などで広範に応用されているデバイスであり，他のレーザーと比較して小型で安価なものが多数製造されている. 特に CD の光ピックアップに用いられる 785 nm 近傍で発振する LD は ^{87}Rb の光学遷移に近い. 本研究で使用したのは中心波長 790 nm の MITSUBISHI 製 60116R-01 と中心波長 785 nm の SANYO 製 DL7140-201[*1]である. これらの LD の中心周波数はおよそ 400 THz であるが，“単一” モード発振する市販の LD は典型的に 10 GHz のオーダーの周波数幅を持ち，Rb 原子の持つ光学遷移の自然幅 6 MHz と比較して広いため，原子集団と光の相互作用を利用した実験研究に用いるにあたってはそのまま使用することができない. この問題を回避するために周波数選択的な発振を可能にする外部共振器を自作し，300 kHz 程度の周波数幅を持った周波数可変の光源を準備した. 安定に掃引できる周波数幅の上限は 100 MHz $\sim$ 1 GHz 程度であった.

外部共振器は図 G.1 に示すように空間周波数 1800 [1/mm] の反射型回折格子による 1 次回折光を LD へ戻すことによって構成され，回折格子に接着された圧電素子 (PZT) に加える電圧によって共振器長を制御することが可能である. 共振器内に置かれた焦点距離 400 mm の凸レンズによって回折格子への入射角を調整することが可能で，LD へ戻され

[*1] DL7140-201 については，780 nm 近傍で発振するものを選択して使っている.

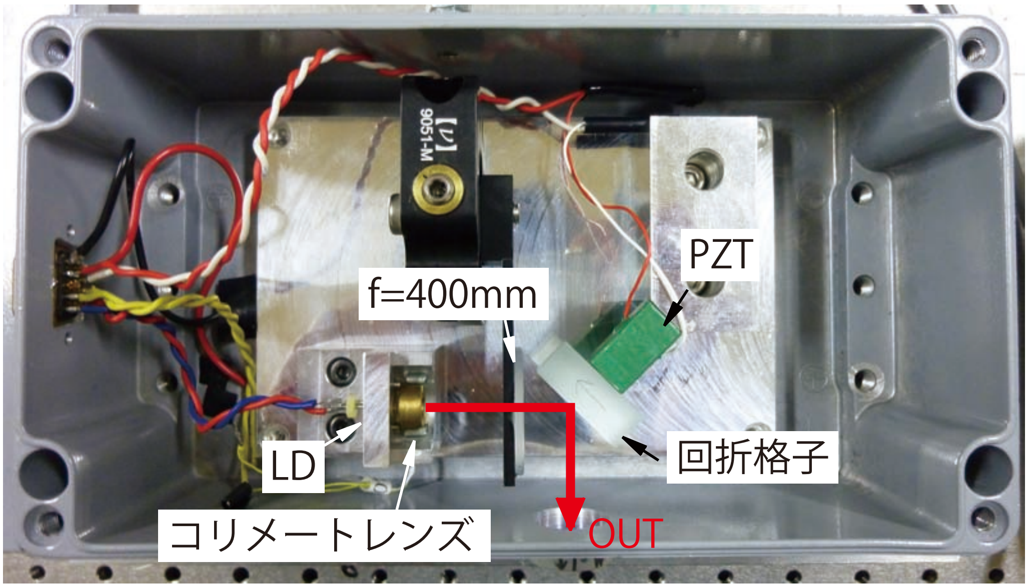

図 G.1　外部共振器付き半導体レーザーの写真．図中の赤線および名称は，説明のために付記されたものである．回折格子での 1 次回折光が LD へ戻されることで外部共振器として機能し，0 次光が出力として使用される．

る光の周波数を回折格子と共振器長で決まる精度で制御できる．共振器長や発振周波数を安定に保つ目的で，LD と外部共振器はまとめて温度制御され，除振台上に固定されている．

周波数ロック

前節のように製作された外部共振器付き半導体レーザー (ECLD) の発振周波数が使用したい光学遷移の周波数に正確に合わせられた状態を長時間にわたって保持する目的で，^{87}Rb の飽和吸収分光により観察された信号を利用したフィードバック制御を行った．

室温の原子ガスを構成する各原子は 300 m/s 程度の速度で乱雑に運動しているため，この原子集団に対して吸収分光を行った場合，∼ GHz オーダーのドップラー幅に微細な構造が埋もれてしまう．これを回避するための手段が飽和吸収分光である．飽和吸収分光では，図 G.2 に示すように周波数 ν の 2 本の光を原子ガス中で対向させて分光することによって，光の入射軸方向の速度成分がゼロ近傍の原子のみが寄与する信号 (ディップ) を得る手法である[*2]．このようにして，原子集団の速度分布に依存しない高分解能な周波数スペクトルを得ることができる．測定された分光信号の一例を図 G.2 に示す．

こうして得られたディップの位置に ECLD の周波数を合わせたいわけであるが，飽和

[*2] ドップラー幅の中に 2 組以上の 2 準位系が存在する場合には，各準位のエネルギー差に相当する周波数 (例えば ν_1，ν_2) に加えて，それぞれのちょうど中間 ($(\nu_1+\nu_2)/2$) でもディップが見られる．

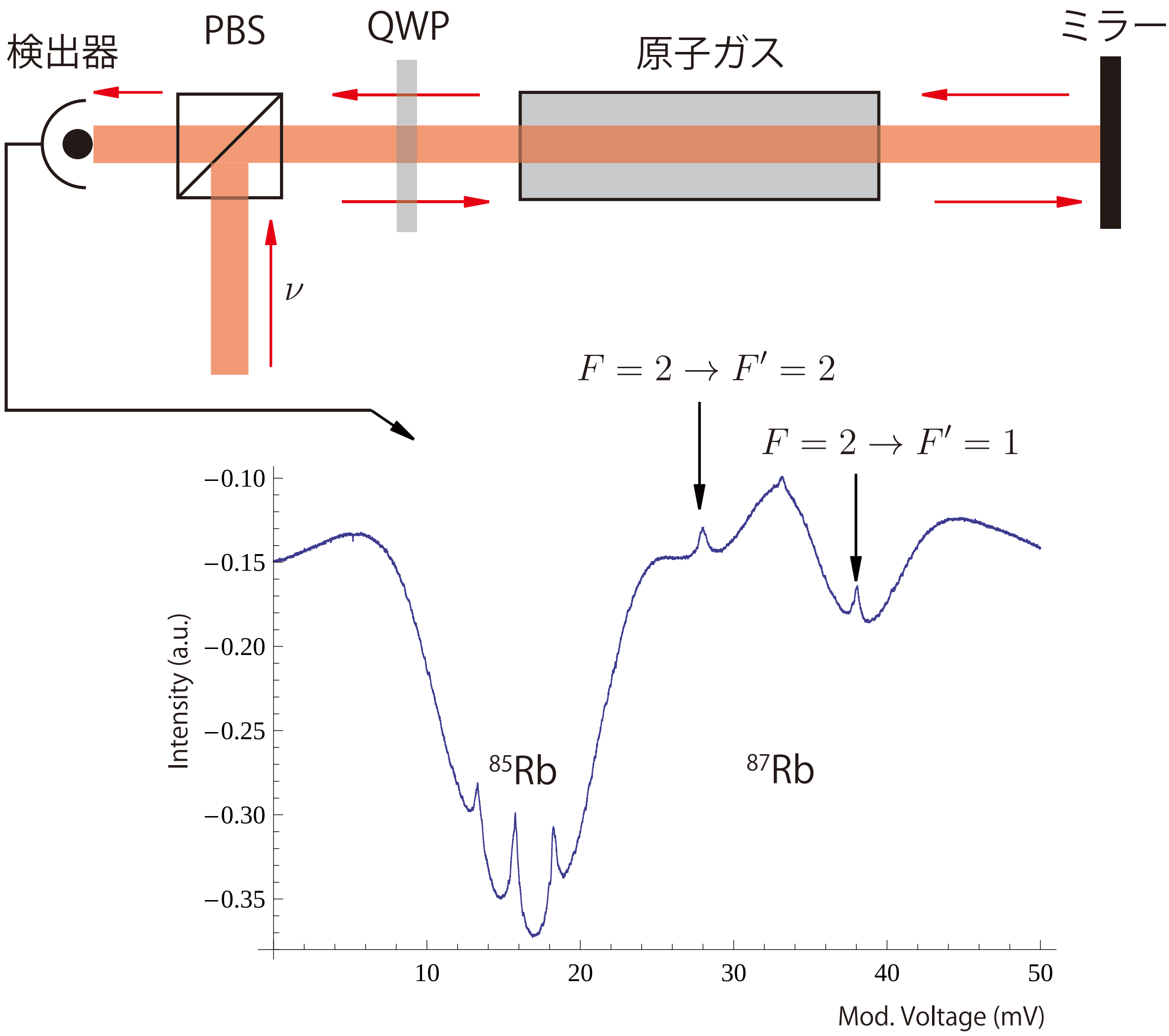

図 G.2　飽和吸収分光の模式図と測定される分光信号の一例．PBS, 偏光ビームスプリッター; QWP, 4 分の 1 波長板．グラフの横軸は周波数 ν に比例する．

吸収分光によって得られるディップは周波数の正負のずれに対して対称であり，そのままでは制御に利用することができない．そこで，光軸方向に交流磁場を印加することで遷移周波数を変調してロックイン検波し，変調信号と位相同期した信号を取り出した．このようにして得られた信号は共鳴周波数の近傍で線形な応答を示すため，適当に増幅，およびオフセットの調整をした上で外部共振器の共振器長を制御する PZT に返してやることで ECLD の周波数制御が実現できる．ECLD 周辺の制御系のブロック図を図 G.3 に示した．

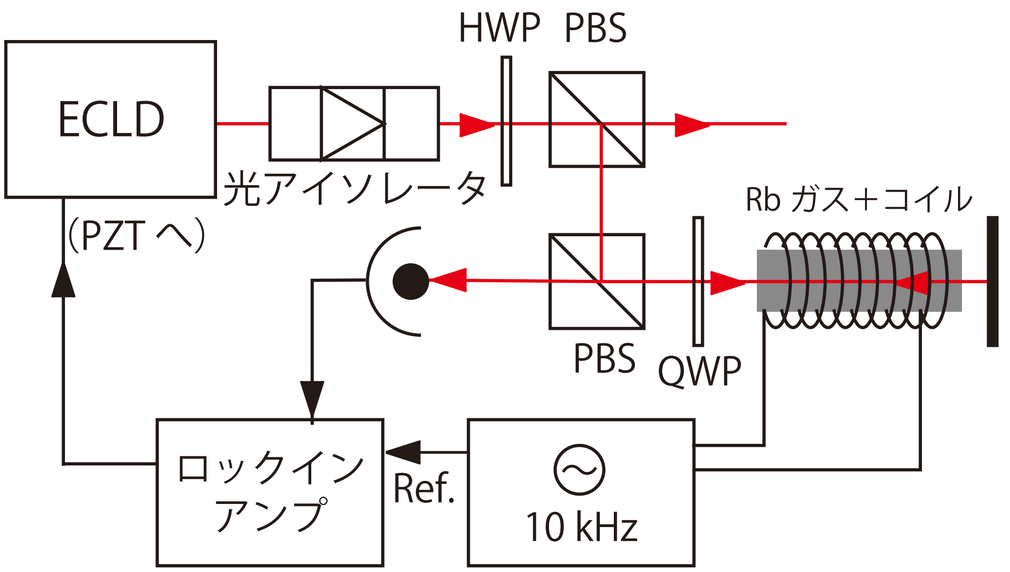

図 G.3　光周波数ロックのためのブロック図．PBS, 偏光ビームスプリッター; HWP, 2 分の 1 波長板; QWP, 4 分の 1 波長板.

G.1.2　テーパー型アンプ

レーザー冷却用光源を増幅するためにテーパー型アンプ (Eagleyard 社製:EYP-TPA-0780-01000-3006-CMT03-0000) を用いた．購入したチップに被増幅光を導入し，安定した出力を得るために設計・製作した装置の写真を図 G.4 から G.7 に示す．設計に当たっては，光結合のためのコリメートレンズやそれらを保持するためのジグ全体を含めた温度調節の実現と，調整にあたっての自由度を最小限に抑えることによる安定性の確保を念頭においた.

また，20 mW の被増幅光に対して測定された出力強度-電流特性を図 G.8 に示す.

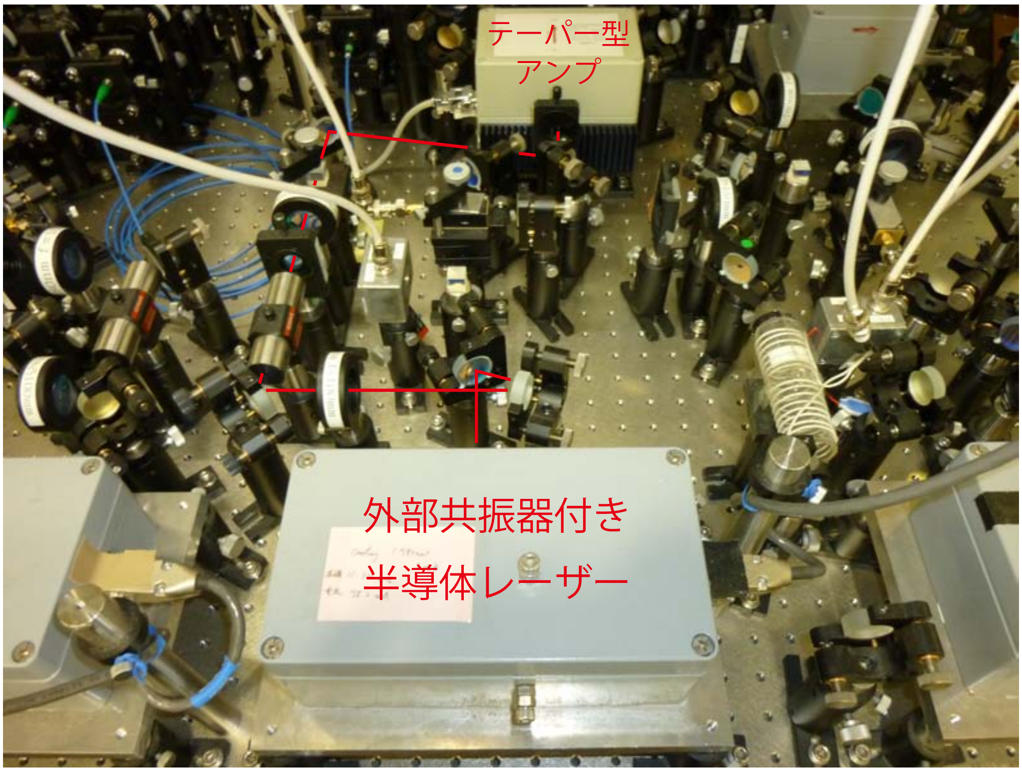

図 G.4　半導体レーザーからテーパー型アンプまでの光学系の写真．図中の赤線は光路を示すために付記されたものである．

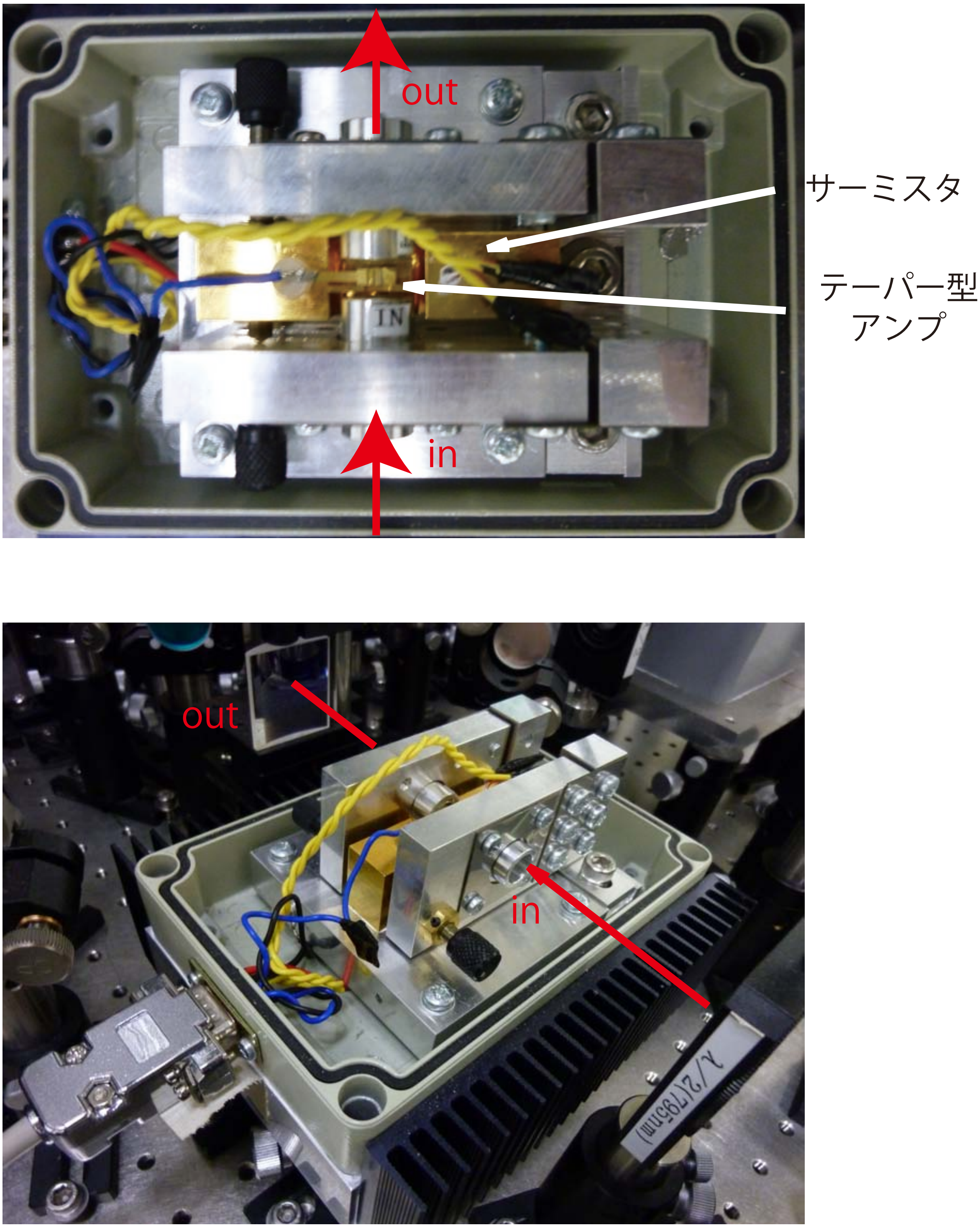

図 G.5　テーパー型アンプ周辺装置の写真．図中の赤線は光路を示すために付記されたものである．

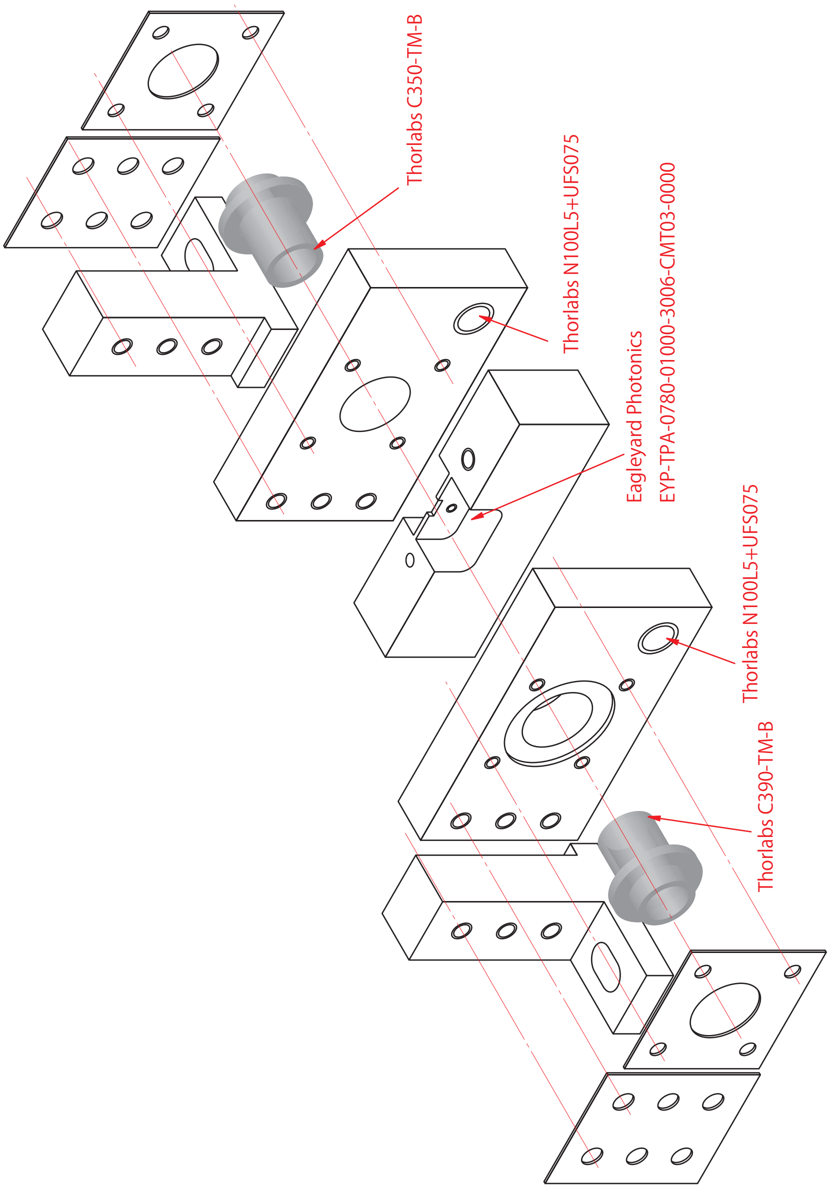

図 G.6　テーパー型アンプ周辺装置（上部）の組み立て図．赤字で付記された市販品をそれぞれ所定の位置に取り付けて使用する．

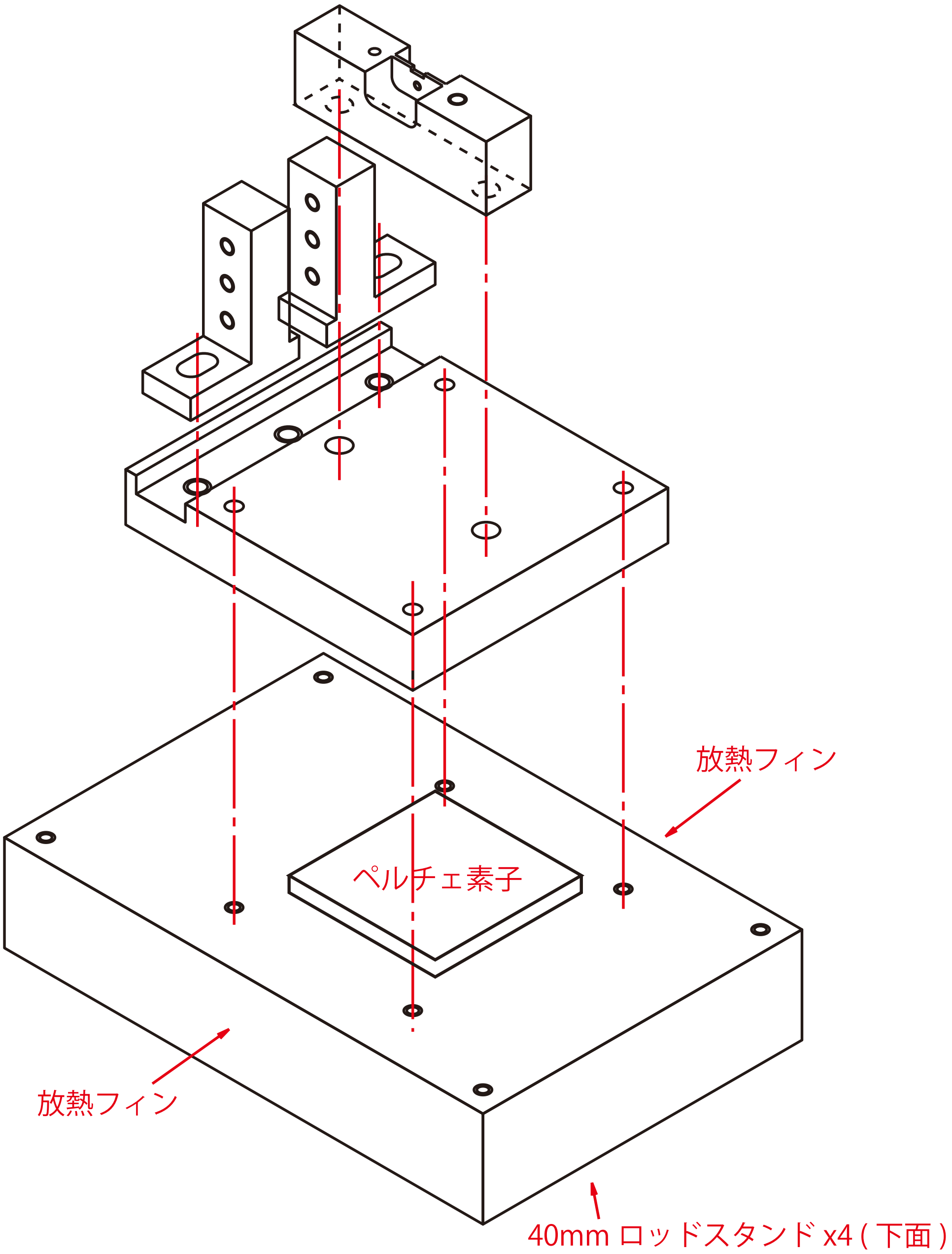

図 G.7　テーパー型アンプ周辺装置 (下部) の組み立て図．赤字で付記された市販品をそれぞれ所定の位置に取り付けて使用する．

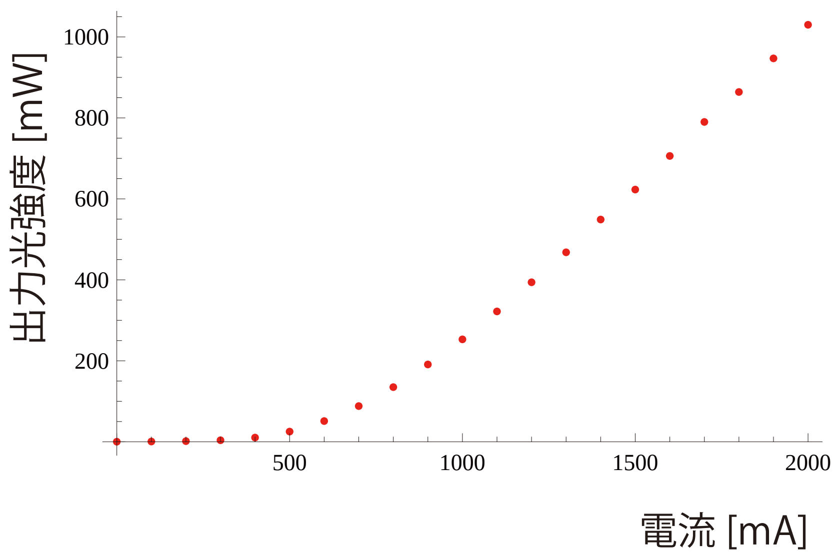

図 G.8　テーパー型アンプの出力光強度-電流特性曲線．入力した光強度は 20 mW である．

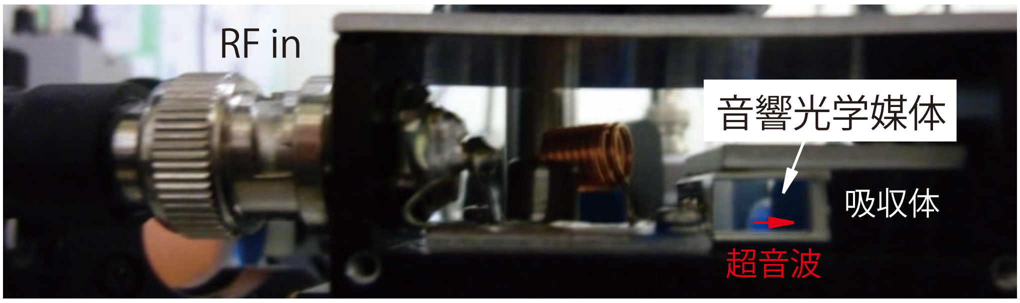

図 G.9　音響光学素子の写真．疎密波は左から右へ伝播し，右端の吸収体で吸収され，反射波の影響を回避している．紙面に垂直な方向に伝播する光ビームは左右方向にブラッグ回折され，ビーム径に依存するものの，70 % から 85 % の回折効率が得られる．実験では，周波数 80 MHz 前後で 1 W 程度の RF 信号を印加した．光スイッチに用いた場合の消光比は 10^3 程度であった．

G.1.3　音響光学素子

モリブデン酸鉛 ($PbMoO_4$) などの音響光学媒体に接着された圧電素子に交流電圧を印加することで，媒体中に疎密波を発生させることができる．弾性媒体中での弾性歪は屈折率の変化を引き起こすため，この媒体中では疎密波の波長を周期とする屈折率の周期構造が作られる．このような媒体中に入射された光は屈折率の周期構造に伴う位相変調を受けて回折され，回折光は入射光から空間的に分離される．加えて，媒体に印加する RF 信号のパワー，周波数によって，回折光の強度，中心周波数のそれぞれを制御することができる [105]．また，応答速度は媒質中を伝播する疎密波の速度と入射される光ビームのビーム径によって制限される．実験で用いた素子における疎密波の速度は 3.63 mm/μs であり，150 μm 程度のビーム径に対して立ち上がり時間 25 ns 程度で応答する．

G.1.4　2 台のレーザーの相対周波数制御

付録 C.3 の実験では，^{87}Rb の基底状態 $5S_{1/2}$ の超微細構造分裂である 6.83 $\cdots$ GHz と同じだけ離れた 2 本の光 (コントロール，プローブ) を用いた．電磁誘起透明化はこれら 2 本の光の相対的な周波数揺らぎに非常に敏感であり，2 台のレーザーから独立に用意された 2 本の光の相対周波数を制御する必要がある．

制御手法としては半導体レーザーを駆動する電流を変調する*3ことによるフィードバック制御と，音響光学素子を用いたフィードフォワード制御 [106] の 2 通りが挙げられる．前者の手法はシンプルであるが，半導体レーザーの周波数変調のゲインには個体差や

*3 PZT では応答が遅すぎる．

経時変化がある点が問題となる．そこで，本研究では後者の手法を用いた．

フィードフォワード方式では制御に音響光学素子を用いる．2 本のレーザー光の干渉を利用して周波数差を常に測定し，それが基準となる周波数から 1 Hz 下がったら音響光学素子に印加する RF 信号を 1 Hz 高くし，1 Hz 上がったら RF 信号を 1 Hz 低くすることで相対周波数の制御が実現される．ブロック図を図 G.10 に示す．

G.2　磁気光学トラップ

G.2.1　磁気光学トラップの原理

磁気光学トラップの原理を定性的に述べる．

全スピン $J=0\,(m_j=0)$ の基底状態，全スピン $J=1\,(m_j=-1,0,1)$ の励起状態とする 2 準位系で記述される理想的な原子があるとし，この原子の遷移周波数 (ω_A) から負の離調 δ を取った同じ周波数 $(\omega_L<\omega_A=\omega_L+|\delta|)$，同じ光強度のレーザー光を対向させて原子に照射する場合を考える．光軸を z 軸と名づける．

まず，静止している原子について考えると，2 本のレーザー光から受ける輻射圧は対称性により等しく，原子は力を受けない．一方で，運動している原子について考えると，負の離調を取っていること，遷移周波数がドップラーシフトを受けることの 2 点から対称性が崩れ，運動方向に対向するレーザー光を比較的よく吸収するようになる．すなわち，運動方向と逆向きの輻射圧を受ける．この議論はただちに 3 次元に拡張できて，速度に依存する輻射圧 $\boldsymbol{F_v}$ は原子速度 $\dot{\boldsymbol{r}}$ に対して

$$\boldsymbol{F}_v=-\alpha\dot{\boldsymbol{r}} \tag{G.2.1}$$

で与えられる．ドップラーシフト量 $|\delta_D|$ は原子の速度の絶対値 $|\dot{\boldsymbol{r}}|$ に依存するため，$|\delta_D(\dot{\boldsymbol{r}})|<|\delta|$ を満たすような速度領域でのみこのような力が働くこともわかる．すなわち，負に離調を取った対向するレーザー光を入射することで原子の速度を落とすことが可能であり，これは原子が冷却されることを意味する．

原子が吸収するレーザー光は，位相や進行方向のそろったエントロピーの小さい光子群であり，原子が放出する自然放出光は，位相や進行方向が乱雑なエントロピーの大きい光子群である．原子は，レーザー光を吸収して自然放出光を放出する際に自然放出光にそのエントロピーの一部を請け負わせると推察され，この過程によって原子集団のエントロピーが小さくなることも理解できる．

冷却過程については上記のように説明されるが，ただ冷却を行うだけでは原子集団の密度が低く，応用実験を行うには不向きである．原子を集めるためには，冷却に用いる速度依存力 (G.2.1) に加えて位置依存力が必要となる．所望の位置依存力は，速度依存力を説明した状況に下記の不均一磁場を加え，対向する光の偏光を適当に定めることで実現で

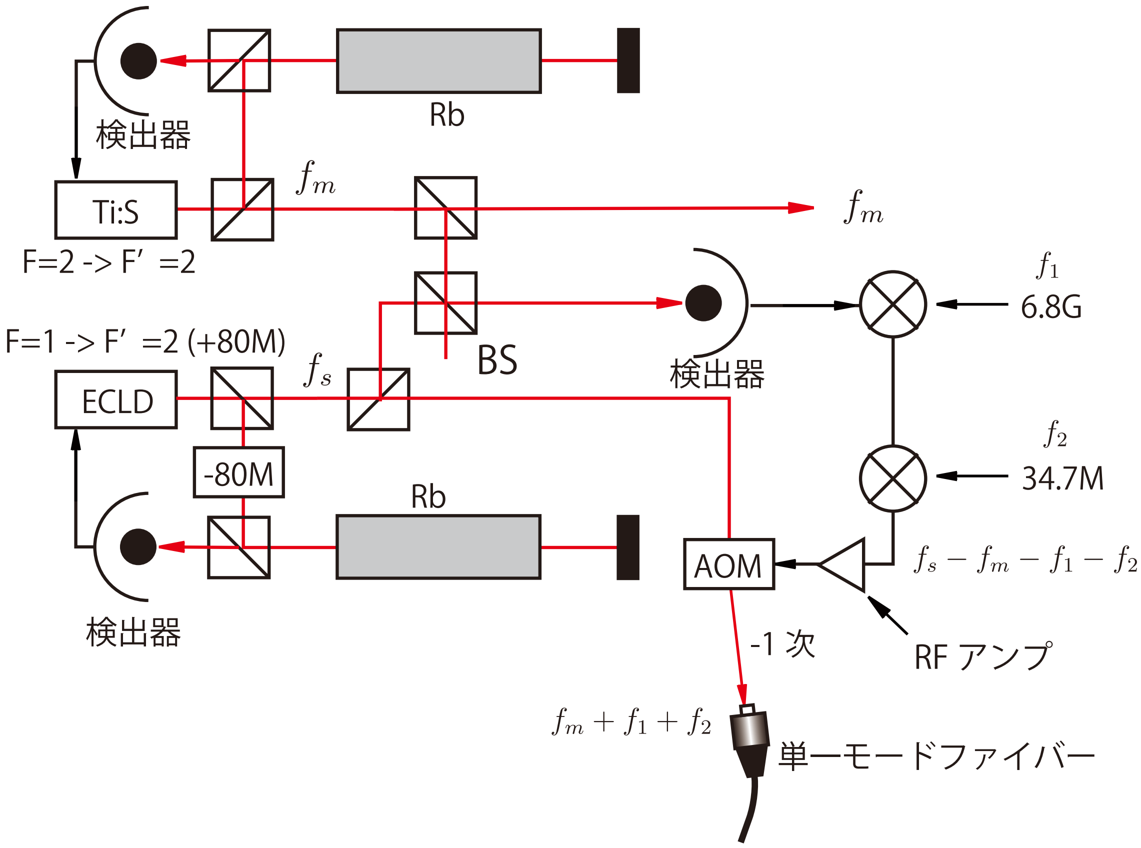

図 G.10　フィードフォワードのブロック図．Ti:S，チタンサファイヤレーザー; ECLD，外部共振器付き半導体レーザー; BS，ビームスプリッター; AOM，音響光学素子．チタンサファイヤレーザーは ^{87}Rb の D1 線 $F = 2 \to F' = 2$ の共鳴周波数 f_m に，ECLD は ^{87}Rb の D1 線 $F = 1 \to F' = 2$ の遷移から 80 MHz 離調を取った周波数 f_s にそれぞれ周波数ロックされている．なお，$f_s > f_m$ である．それぞれを BS で混ぜ合わせた光の強度を測定することで周波数 $f_s - f_m$ で振動するビート信号が得られ，f_1, f_2 のそれぞれとミキシングすることで得た $f \equiv f_s - f_m - f_1 - f_2 \simeq 80$ MHz の RF 信号をアンプして AOM に印加する．-1 次の回折を利用することで，周波数 $f_s - f = f_m + f_1 + f_2$ の光が得られ，周波数 f_m の光と併せて $f_1 + f_2$ だけ離れて同期された 2 本のレーザー光を得る．$f_s - f_m - f_1 + f_2 \simeq 150$ MHz のような RF 信号も AOM に印加されるが，回折効率が低いことに加えて，異なる周波数成分による回折光は異なる角度に回折されるため，単一モードファイバーを用いることで問題なく分離できる．検出されたビート信号と周波数変調のタイムラグを少なくするために，AOM 中の音響光学媒体中で圧電素子に極力近い領域に細く絞った光ビームを入射するようにする．なお，半導体レーザーのコヒーレンス時間は μs のオーダーであり，媒体中の超音波の伝播速度は 3.63 mm/μs である．

きる．

磁束密度の z 軸方向成分が $b > 0$ として $B_z = bz$ と表されるような状況を考えると，この磁場中におけるゼーマンシフトは，磁気量子数を m_j として

$$\Delta E = m_j g_j \mu_B bz \tag{G.2.2}$$

で与えられる．ここで，μ_B はボーア磁子，g_j はランデの g 因子である．

原子は $z = 0$ 付近にあるものとし，z 軸正の向きを量子化軸方向として，z 軸正の向きに σ^+ 偏光，z 軸負の向きに σ^- 偏光のレーザー光を対向させて入射する．$\sigma^\pm$ 偏光の光子はそれぞれ磁気量子数 $m_j = \pm 1$ を持ち，レーザー光の量子化軸と原子の量子化軸を一致させると，$\sigma^\pm$ 偏光の吸収に対応して原子の磁気量子数も ±1 変化する．すなわち，$\sigma^\pm$ 偏光の光子の吸収/放出は $|J = 0, m_j = 0\rangle \leftrightarrow |J = 1, m_j = \pm 1\rangle$ の遷移に対応する．

図 G.11 に示すように，$z < 0$ にある原子は z 軸正の向きに伝播する σ^+ 偏光の光に対する遷移確率が高く，$z < 0$ にある原子は z 軸負の向きに伝播する σ^- 偏光の光に対する遷移確率が高い．すなわち，$z < 0$ の原子は z 軸正の向きに，$z > 0$ の原子は z 軸負の向きに輻射圧を受ける．この議論は直ちに 3 次元に拡張できて，位置に依存する輻射圧 $\boldsymbol{F}_r$ は原子位置 $\boldsymbol{r}$ に対して

$$\boldsymbol{F}_r = -\beta \boldsymbol{r} \tag{G.2.3}$$

で与えられる．ドップラー冷却[*4]も同時に起きるので，輻射圧は全体で

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}_v + \boldsymbol{F}_r = -\alpha \dot{\boldsymbol{r}} - \beta \boldsymbol{r} \tag{G.2.4}$$

と書ける．

このように，原子集団を冷却し，集める目的で入射するレーザー光を Cooling 光と呼ぶ.

G.2.2　^{87}Rb 原子集団の磁気光学トラップ

冷却遷移

G.2 で示したように，適当な Cooling 光と磁場を用いて理想的な 2 準位系を持った原子集団を冷却し集めることが可能であるが，実際の原子集団は仮定のように理想的ではない．しかし，^{87}Rb の $5S_{1/2}$, $F = 2$ から $5P_{3/2}$, $F' = 3$ の遷移は上記の仮定を近似的に満足し，冷却遷移として利用可能である．

まず，全スピンの変化が ±1 でない遷移が (1 光子による遷移では) 禁制であるという選択律から，2 準位系の仮定は満たされていると言える．ただし，レーザーの周波数には広がりがあり，原子は共鳴から離調を取った光であっても吸収できるため，$5S_{1/2}$, $F = 2$ か

[*4] 偏光に依存しない．

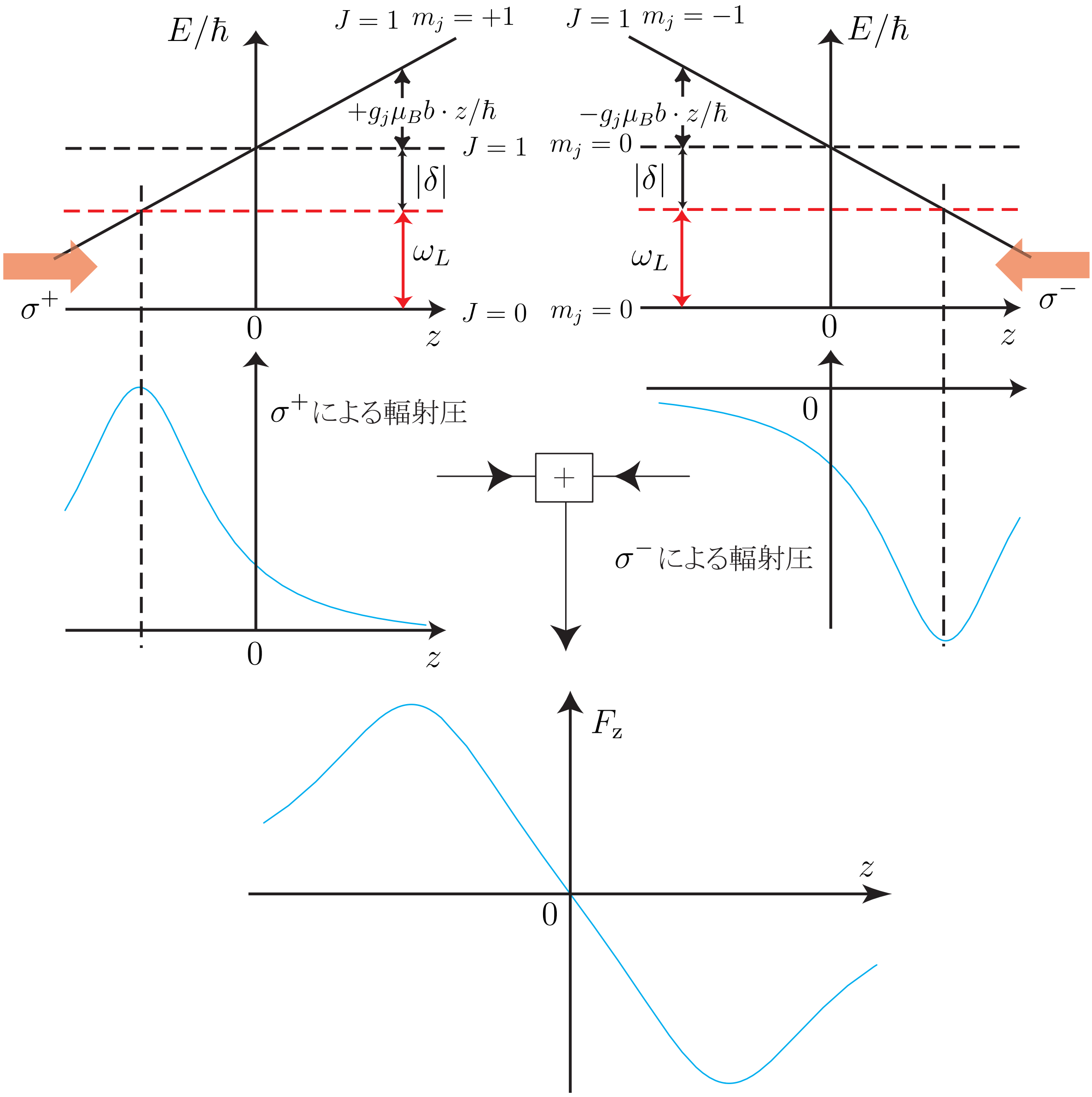

図 G.11　磁気光学トラップに寄与する位置依存力の直感的イメージ

ら $5P_{3/2}$, $F' = 3$ の遷移周波数に合わせた場合であっても，比較的低い確率ではあるが，$F' = 2$ や $F' = 1$ に励起される．このような原子は $5S_{1/2}$, $F = 1$ に落ちる場合があり，$F = 1$ に落ちた原子は $F = 2 \leftrightarrow F' = 3$ の冷却遷移から外れてしまうため，冷却機構が働かなくなる．確率的には起こり難い過程であるが，$F = 2 \leftrightarrow F' = 3$ の遷移を何度も繰り返す関係で，Cooling 光だけを入射するとやがてすべての原子が $F = 1$ にポンピングされ，原子集団全体に対して磁気光学トラップが働かなくなる．これを解決するためには，$5S_{1/2}$, $F = 1$ から $5P_{3/2}$, $F' = 2$ の遷移に周波数を合わせた別のレーザー光を Cooling 光と同時に入射してやればよい．このレーザー光を，Repumping 光と呼んでいる．

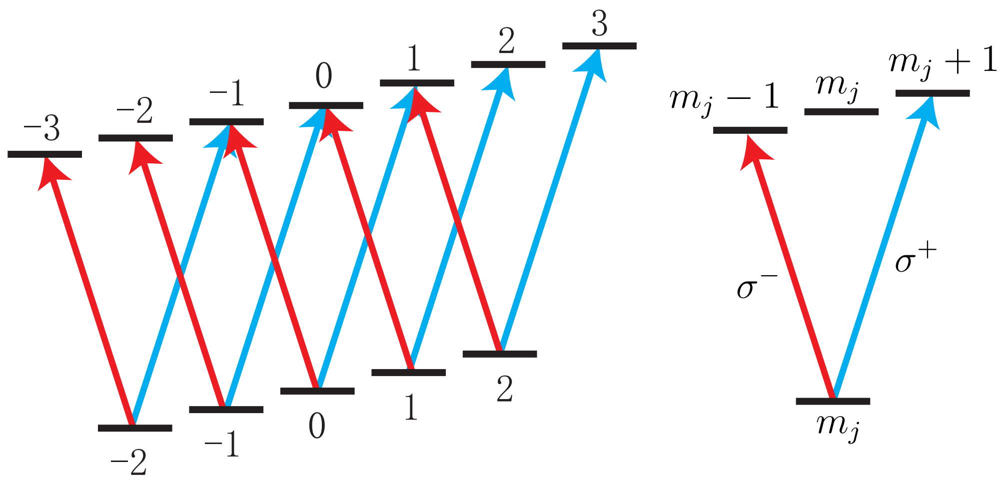

図 G.12　^{87}Rb 原子集団の磁気光学トラップに用いられる冷却遷移．$5S_{1/2}$, $F=2$ から $5P_{3/2}$, $F'=3$ であり，G.2 で仮定されていた理想的な 2 準位系を 5 つ組み合わせたものと近似的にみなせる．

一方で, 基底状態 $5S_{1/2}$, $F=2$ の全スピンは 0 でなく 2 であり, 励起状態 $5P_{3/2}$, $F'=3$ の全スピンは 1 でなく 3 である．すなわち，不均一磁場によって基底準位，励起準位ともにゼーマンシフトを受け，それぞれ 5 つ，7 つの準位に分裂する．このような状況では，図 G.12 に示すように過不足無く 5 組の遷移に分割して考えることが可能であり，またどの基底状態に対しても励起状態のゼーマンシフト量が基底状態のゼーマンシフト量よりも大きいので，仮定した理想的な原子の遷移と同様に扱える．

このことを計算によって確かめる．今，ゼーマンシフト量は式 (G.2.2) で与えられている．超微細構造に関するランデの g 因子は

$$g_{F,j} \simeq g_j \frac{F(F+1)-I(I+1)+J(J+1)}{2F(F+1)},$$
$$\text{where} \quad g_j \simeq 1+\frac{J(J+1)+S(S+1)-L(L+1)}{2J(J+1)}$$

で計算できる．^{87}Rb の核スピン $I=3/2$ であり，基底準位の $5^2\mathrm{S}_{1/2}, F=2$ では $L=0$, $S=1/2$, $J=1/2$, $F=2$ なので $g_{s,F=2}=1/2$，励起準位の $5^2\mathrm{P}_{3/2}, F=3$ では $L=1$, $S=1/2$, $J=3/2$, $F'=3$ なので $g_{p,F'=3}=2/3$ とそれぞれ計算できる．$\sigma^{\pm}$ 偏

光の光を吸収するときの各組での実効的なシフト量 $\Delta E_{\pm,m_j}$ は

$$\begin{aligned}
\Delta E_{\pm,m_j} &= (m_j \pm 1) g_{p,F'=3}\mu_B bz - m_j g_{s,F=2}\mu_B bz \\
&= \frac{1}{6}(m_j \pm 4)\mu_B bz \\
&= \begin{cases} b_+ z & (\text{for } \sigma^+) \\ -b_- z & (\text{for } \sigma^-) \end{cases} \\
\text{where} \quad b_\pm &\equiv \frac{4 \pm m_j}{6}\mu_B b > 0 \quad (-2 \le m_j \le 2)
\end{aligned} \tag{G.2.5}$$

で与えられ，確かに仮定を満たしている．

四重極磁場

3 次元方向で位置依存力を働かせて原子を集めるためには，

$$\boldsymbol{B} = b_x x\, \boldsymbol{e}_x + b_y y\, \boldsymbol{e}_y + b_z z\, \boldsymbol{e}_z \tag{G.2.6}$$

のような磁場をかける必要がある．このような磁場は四重極磁場と呼ばれ，2 つのコイルにそれぞれ逆向きの電流を流すことで近似的に実現できる．このようなコイルはアンチヘルムホルツコイルと呼ばれる．

実験では，直径 50 mm，100 回巻き，50 mm の間隔で配置したアンチヘルムホルツコイルにそれぞれ 2 A の電流を流して四重極磁場を発生させている．磁束密度を図 G.13 に示す．原点付近における，水平 (x,y) 方向および垂直 (z) 方向の磁場勾配はそれぞれ 11 G/cm，22 G/cm であった．グラフから，原点付近では式 (G.2.6) に近い状況が達成されることがわかる．

誘導電流による磁場

測定時間中は Cooling 光，磁場を off にする必要がある．磁場を切るにはアンチヘルムホルツコイルに流す電流を遮断すればよい．実験 II を行った当時は，このように高速に変化する磁場に応答する磁場メーターが手元に無かったため，磁場の立下り時間そのものを評価することなく，電流のたち下がり時間に準じる速度で切れるものと考えていた．しかし，後になって 10 kHz 程度まで応答する磁場メーターを用いて磁場の立ち下がり時間を評価したところ，図 G.14(a) に示すように数 ms の時間をかけてゆっくりと磁場が切れることが明らかになった．これは金属製のコイルの治具に流れる誘導電流に起因する二次的な磁場であると予想され，コイルと同様の閉経路ができないよう切り込みを入れた治具を用意して再度磁場の測定を行ったところ，図 G.14(b) に示すように改善された．実験 III, 実験 IV では，非金属のジグにコイルを固定することでこの誘導電流による残留磁場の影響を抑えている．使用するエネルギー準位に適切なものを選択することと併せて，この改善によって光子対のフラックスは劇的に大きくなった．

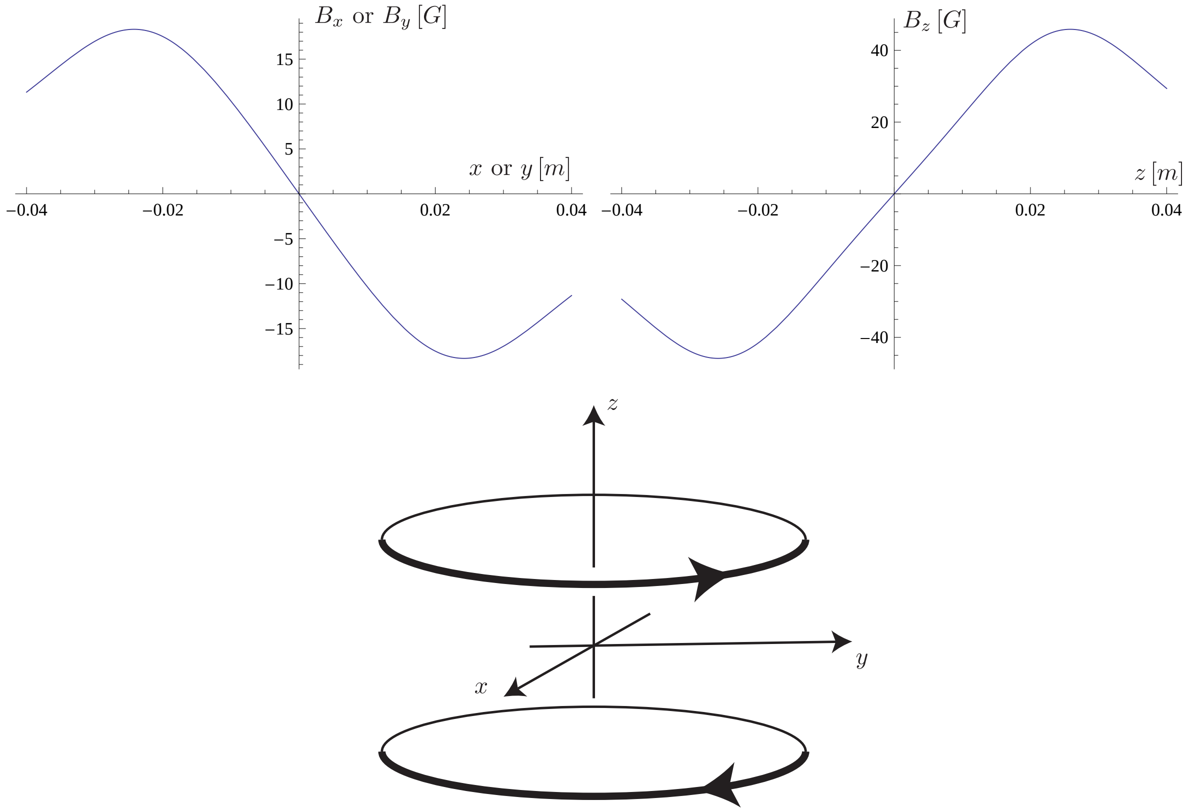

図 G.13　アンチヘルムホルツコイルと磁束密度の大きさ

ドップラー冷却限界温度

ドップラー冷却において，速度依存力の式 (G.2.1) によれば，原子の速度が最終的に 0 になるように思われるが，それは誤りである．式 (G.2.1) では自然放出による反跳の効果を (等方的であるから) 無視できるものとして扱っているが，この近似は速度が大きい領域でのみよく成り立つ．十分に減速された原子は，対向するレーザー光を殆ど等しい確率で吸収するようになるため，ランダムな方向に光子の吸収・自然放出を繰り返す結果として光子の運動量 $\hbar k$ に由来する加熱を受けると考えられる．この効果を考慮すれば，ドップラー冷却により到達できる限界温度 T_D について

$$k_B T_D = \frac{\hbar\Gamma}{2} \tag{G.2.7}$$

が成り立つ．ここで，k_B はボルツマン定数，$\hbar$ はプランク定数，Γ は自然幅である．^{87}Rb においては，$T_D \sim 140\,[\mu\mathrm{K}]$ と計算できる．

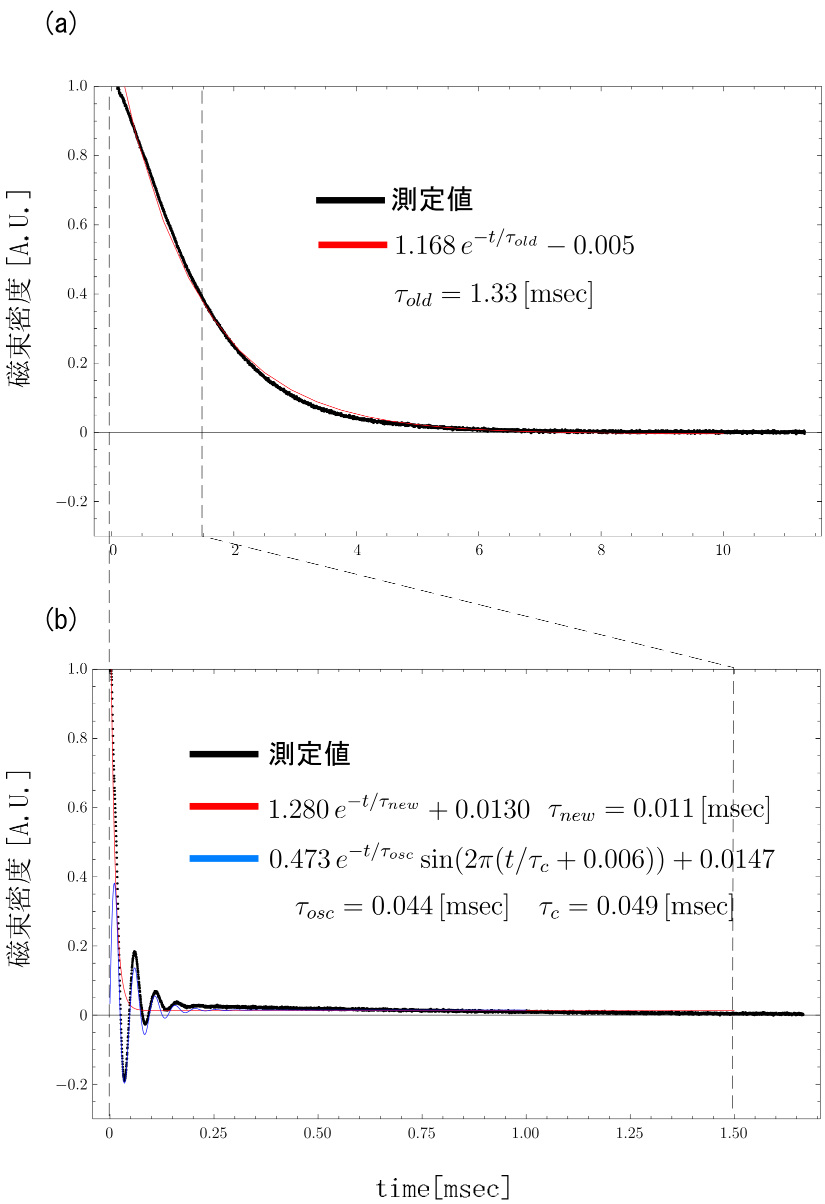

図 G.14　コイルを固定するジグが残留磁場に及ぼす影響．(a) 金属製の，閉ループが存在するジグの場合の，電流を遮断した時刻 [0msec] 以降の磁場の大きさ．(b) 閉ループができないようにした場合の，電流を遮断した時刻 [0msec] 以降の磁場の大きさ．(a), (b) を比較することで，電流遮断後長い時間スケールで存在している磁場が誘導電流の影響であろうことが示唆される．実験 III, IV では，この影響を回避するために，非金属製のコイルジグを使用した．

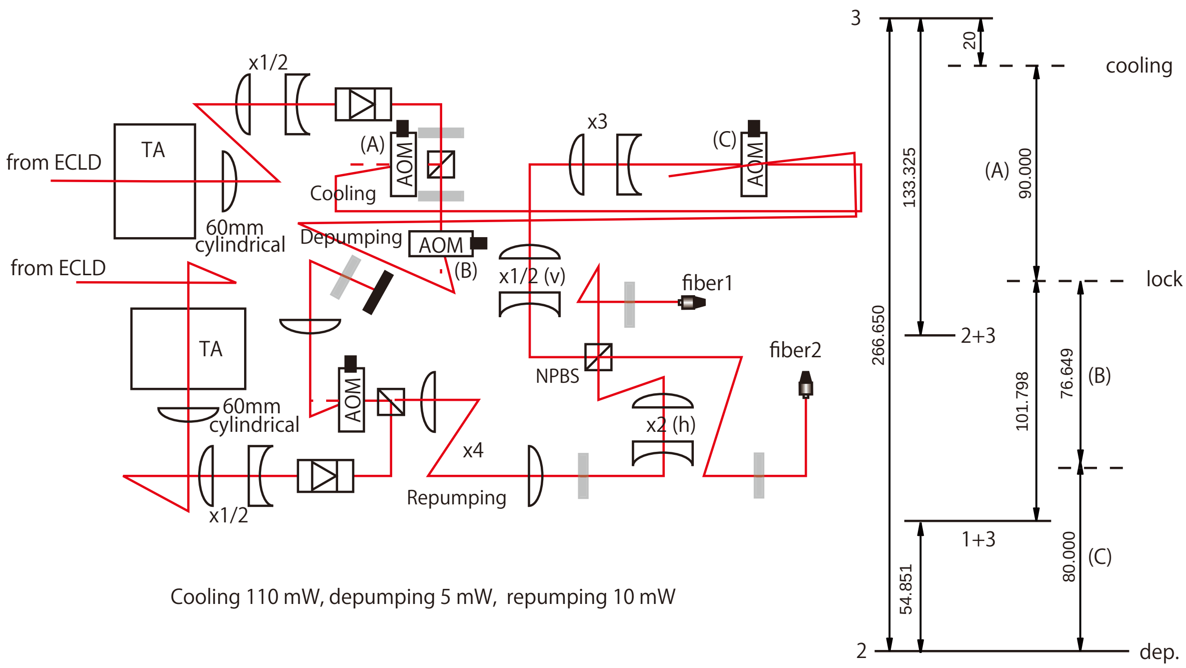

図 G.15　レーザー冷却，光ポンピング用の光源の光学系．TA, テーパー型アンプ; ECLD, 外部共振器付き半導体レーザー; AOM, 音響光学素子; fiber, 単一モードファイバー．fiber1, fiber2 それぞれの出射では，Cooling 光 110 mW，Repumping 光 10 mW，Depumping 光 5 mW を安定して得られる．なお，すべて同じ直線偏光である．右側に，Cooling 光，Depumping 光に関連した周波数設定を光学系の AOM と関連付けて付記した．図では，$5P_{3/2}F = 2, 3$ とその間に存在するクロスオーバーが記載されている．ECLD からの光は，$5P_{3/2}F = 1, 3$ のクロスオーバー (図中では $1 + 3$ と表記) から図中に表現されていない AOM を用いて 102 MHz 程度シフトさせて周波数ロックされている．また，(C) と付記された AOM は，回折させた場合に Depumping 光が，回折させない場合には Cooling 光がそれぞれ単一モードファイバーに結合するように調整されている．

光源

磁気光学トラップを行うためには，前述のとおり Cooling 光，Repumping 光を用意する必要がある．加えて，実験 III, IV では $5S_{1/2}$, $F = 1$ に光ポンピングする役割を果たす，$5S_{1/2}$, $F = 2 \to 5P_{3/2}$, $F = 2$ に共鳴の Depumping 光を用いた．具体的には，図 G.15 に示すような光学系を構築し，Cooling 光と Repumping 光，Depumping 光が同じ偏光で，同一の単一モードファイバーから出力される光学系を用意した．後に計画している実験での要請から，同様の光が 2 つ得られるようにした．

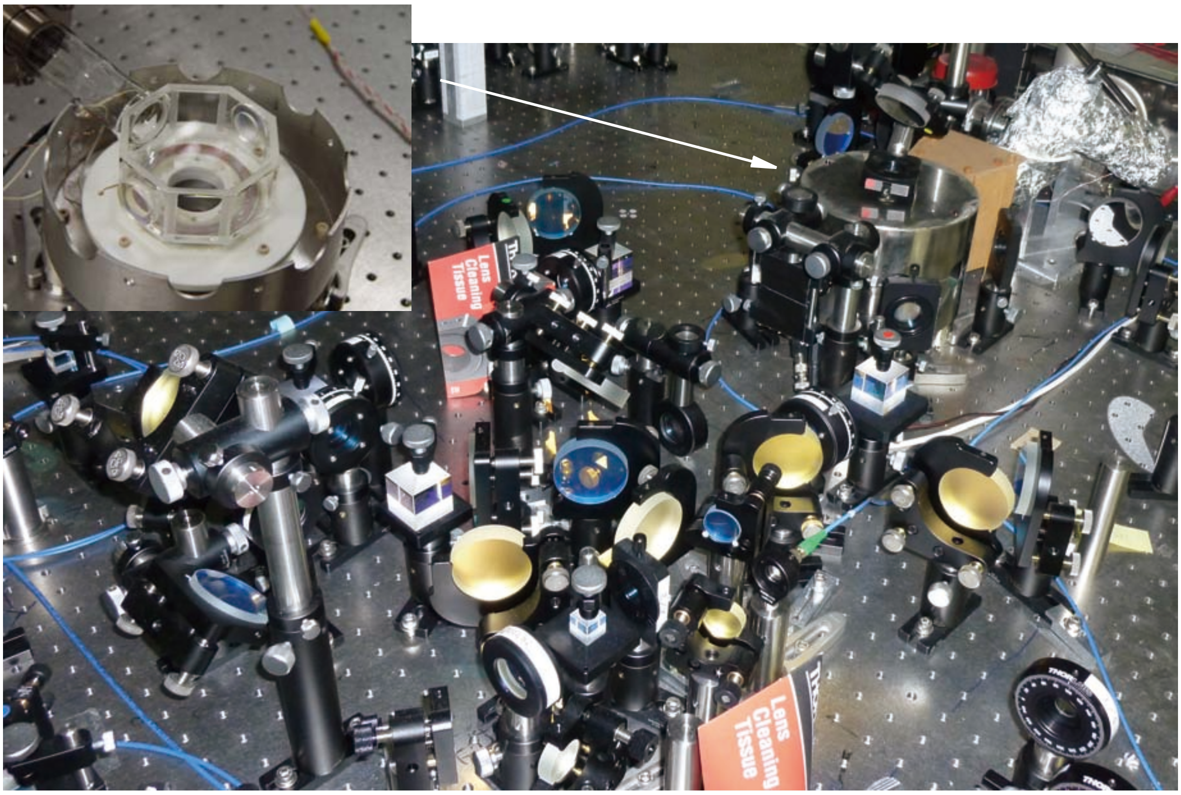

図 G.16　磁気光学トラップのための光学系の写真．右奥の銀色の円筒は磁気シールドであり，この中に左上に示した八角形のガラスセルがある．

光学系

多数個の原子を集めるためには，広い領域で位置依存力を働かせる必要がある．そのためには，ガウシアンモードの光よりも一様な強度分布を持った光のほうが望ましい．そこで，Cooling 光としては，単一モードファイバーからの出射 (ガウシアンモードとみなせる) をレンズで大きく広げ，中心付近を切り出して用いた．このようにして作られた光を 6 本に分け，10^{-9} Torr 程度の高真空中に準備した ^{87}Rb ガスに照射することで冷却原子集団を生成した．装置の写真を図 G.16 に示す．

G.3　単一モードファイバーへの光結合

単一モードファイバーへ光ビームを導入するにあたっては，光ビームの空間モードを単一モードファイバーのそれと一致させる必要がある．この目的を達成するための手法としては，(1) 焦点距離の短い対物レンズとファイバーの相対位置を調整する手法 (2) 焦点距離の長い凸レンズを用いる手法，の 2 通りが挙げられる．市販のレーザーフォーカシング

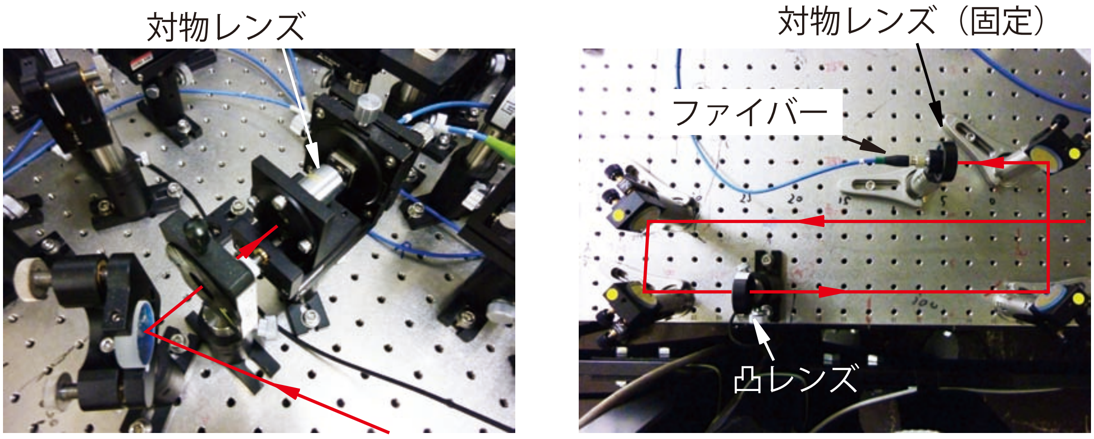

図 G.17　単一モードファイバーへの光結合のための光学系の写真．（左）本文中の手法 (1)，（右）本文中の手法 (2)．

ホルダーは前者であるが，調整が容易で省スペースである一方で，使用するレンズの焦点距離の短さに起因する不安定性が問題となる*5．後者は前者と比較して結合効率の安定性が高いものの，調整には手間とスペースが必要となる．本実験では，両者を目的に応じて使い分けている．本節では，後者の手法 (2) について説明する．

手法 (2) では，単一モードファイバー (SMF) と対物レンズとがメカニカルに固定されており，SMF から出力された光ビームは緩やかに広がりながら伝播する．結合させたい光ビームもまた広がりながら SMF に向かっている．両者のビーム径が一致する地点に，一方の波面の曲率半径をもう一方のそれに一致させるような変換を行う凸レンズをおくことで，両者の空間モードを一致させることが可能である．

まず，結合させたい光ビーム，および SMF から出力される光ビームの空間モードを測定する．具体的には，それぞれのビームに対して基準位置を適当に決め，基準位置から様々な距離にある点でのビーム半径 W を測定する．ガウシアンモードで伝播する波長 λ，くびれの位置 z_0，z_0 でのビーム半径 w_0 の光ビームに関して，位置 z でのビーム半径 $W(z)$ は

$$W(z) = w_0\sqrt{1+\left(\frac{\lambda(z-z_0)}{\pi w_0^2}\right)^2} \tag{G.3.1}$$

で与えられ，測定値をこの関数でフィッティングすることで w_0，z_0 のそれぞれを求めることができる．

*5 通常の使用においては特に問題にならないが，本研究では空間モードに敏感な測定を行っている関係で，特に光子検出のための単一モードファイバーにおける結合効率の不安定性は測定基底の不確かさに直結するため可能な限り対処しておく必要がある．

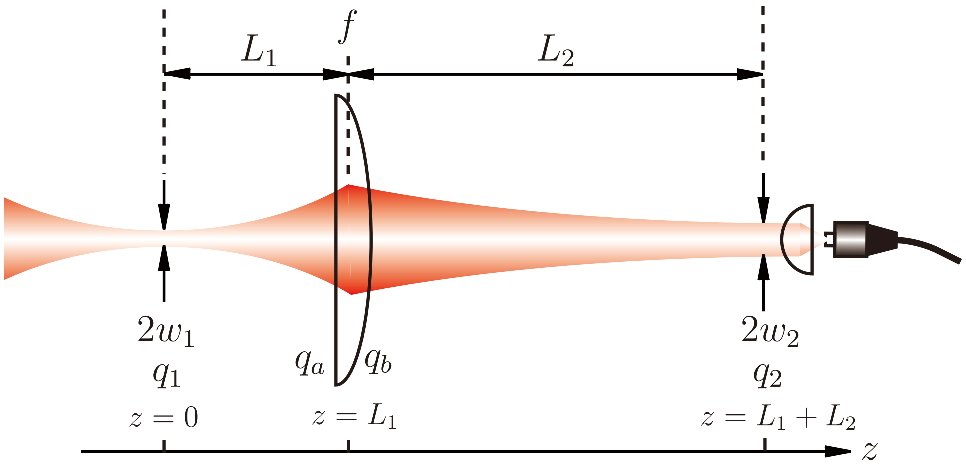

図 G.18　単一モードファイバーへの 1 枚の凸レンズを用いた光結合．適当なレンズの焦点距離 f のもとで，2 つのモードが一致する L_1, L_2 を求められれば，入力ビームを単一モードファイバーへ結合させることができる．q_1，q_a，q_b，q_2 はそれぞれ対応する位置でのガウシアンビームを特徴付ける q パラメターである．レンズの厚みは無視できるものとする．

z 軸方向に伝播する波長 λ のガウシアンビームを特徴付ける q パラメター $q(z)$ は，位置 z におけるビーム半径を $w(z)$, 波面の曲率半径を $R(z)$ として，次のように定義される:

$$\frac{1}{q(z)} \equiv i\frac{\lambda}{\pi w(z)^2} + \frac{1}{R(z)}. \tag{G.3.2}$$

今，図 G.18 中の位置 $z=0$ での q パラメターが

$$q_1 = i\frac{\pi w_1^2}{\lambda} \equiv iz_1 \tag{G.3.3}$$

で与えられている．このビームが図 G.18 に示されているように伝播するとき，各位置における q パラメターはそれぞれ次のように計算できる．

$$q_a = q_1 + L_1 = iz_1 + L_1 \tag{G.3.4}$$

$$q_b = \frac{q_a}{q_a/f+1} = \frac{iz_1+L_1}{(iz_1+L_1)/f+1} = \frac{fL_1^2 + f^2L_1 \quad fz_1^2 + if^2z_1}{(L_1 \quad f)^2 + z_1^2} \tag{G.3.5}$$

$$q_2 = q_b + L_2 = \frac{fL_1^2 + f^2L_1 \quad fz_1^2}{(L_1 \quad f)^2 + z_1^2} + L_2 + i\frac{f^2z_1}{(L_1 \quad f)^2 + z_1^2} \tag{G.3.6}$$

一方で，図 G.18 中の位置 $z=L_1+L_2$ での q パラメターは既知であり，

$$q_2' = i\frac{\pi w_2^2}{\lambda} \equiv iz_2 \tag{G.3.7}$$

と与えられている．したがって，入力ビームを単一モードファイバーに結合させるための光学素子の配置を決定するためには，使いたいレンズの焦点距離 f を与えた上で，$q_2 = q_2'$ を L_1, L_2 について解けばよい．すなわち，

$$\mathrm{Re}[q_2] = \mathrm{Re}[q_2'] = 0, \quad \mathrm{Im}[q_2] = \mathrm{Im}[q_2'] = z_2 \tag{G.3.8}$$

から，

$$L_1^{(\pm)} = f \pm \frac{\sqrt{z_1 z_2 f^2 - z_1^2 z_2^1}}{z_2}, \quad L_2^{(\pm)} = f \pm \frac{\sqrt{z_1 z_2 f^2 - z_1^2 z_2^1}}{z_1} \tag{G.3.9}$$

を得る (複号同順)．図 G.18 に示した模式図では, $w_1 < w_2$ から $z_1 < z_2$ であり, $L_1 < L_2$ である[*6]．すなわち，図 G.18 に合致する解は $L_1^{(+)}$，$L_2^{(+)}$ の組である．なお，図 G.18 のビームの広がりに着目すると，$z < 0$ の位置にもビーム径が一致する点がある．その位置に凸レンズを置く配置が $L_1^{(-)}$，$L_2^{(-)}$ の解に相当する．

実践上は，結合効率の安定性を確保するために焦点距離としては 100 mm から 500 mm 程度の範囲から光路長が極端に長くならないよう適当に選んだ[*7]．L_1，L_2 を算出された値に合わせた上で光路を微調整し，結合効率が最大化されるように L_1，L_2 も微調整した．最適化された結合効率の典型値は 80 % 程度であった．

G.4　空間光位相変調器の制御

本研究で使用した空間光位相変調器は浜松ホトニクス製プログラマブル位相変調ユニット X8267 である．位相変調を行う 768px × 768px の各画素に印加される電圧を制御するための信号の規格は，PC のディスプレイ制御に用いられるアナログ RGB 信号と同様であり，RGB 信号の G（緑）成分のみが制御に利用される．そこで，光軸上の任意の点に位相特異点を付加するような変調を実現するために，基となる位相変調パターン（例えば図 D.1）を 1024px × 1024px のビットマップファイル形式の画像として作成し，そのビットマップ画像の任意の 768px × 768px の領域を 1024px × 768px のディスプレイの中央に表示させるソフトウェアを作成した．この RGB 信号を付属のドライバに入力することで，所望の位相変調が実現された．

*6 図 G.18 は模式図だが，$z_1 < z_2$ は 1 とラベルされた側のビーム径が 2 とラベルされた側と比較して広がりやすいことを意味しており，レンズは両側のビーム径が一致する点に置かれることが必要なので，レンズを図 G.18 のように配置する限りにおいては $w_1 < w_2 \rightarrow L_1 < L_2$ は常に正しい．

*7 実験で使用している光の波長 795 nm は一般的なレンズの設計波長から大きくずれているため，焦点距離も 1 % 程度ずれてしまう．素材の屈折率の波長依存性を考慮し，適宜補正された値を利用した．

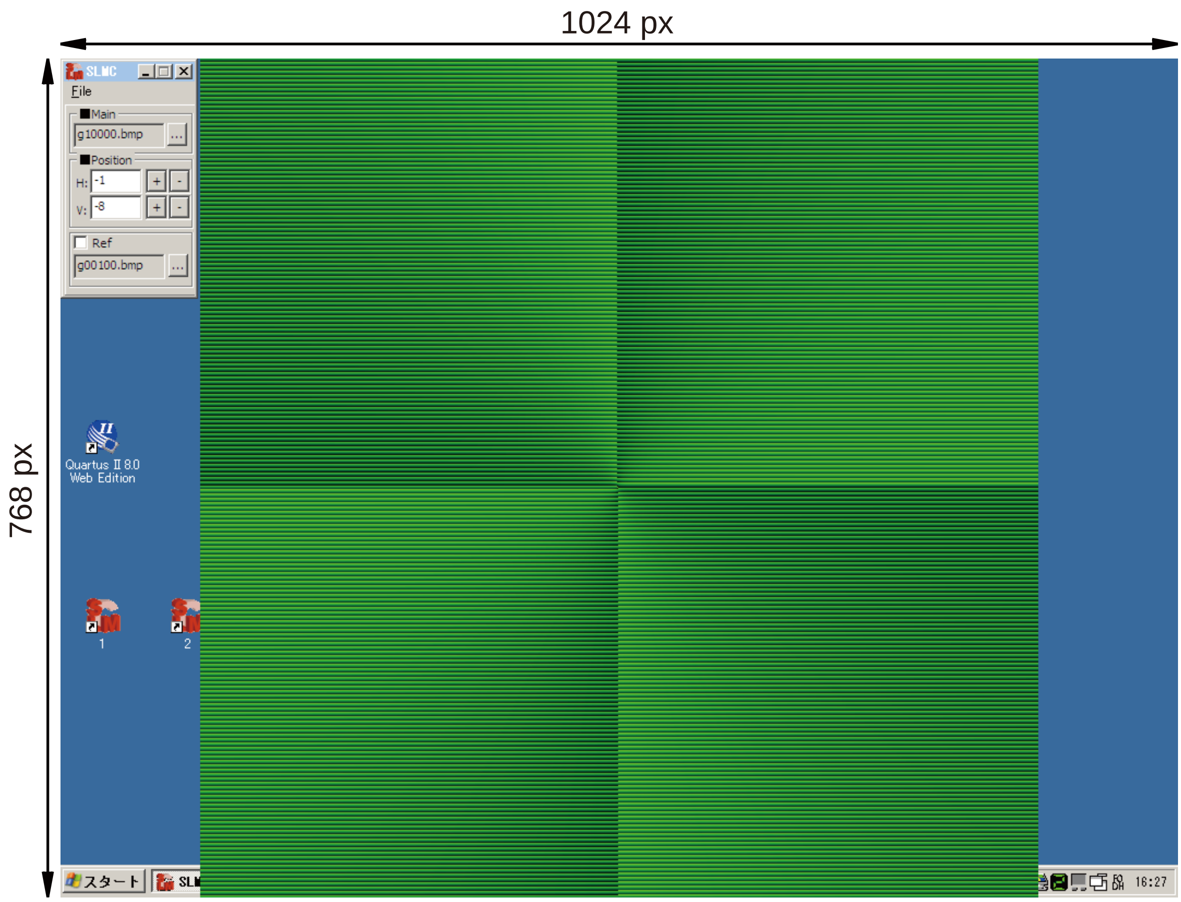

図 G.19　空間光位相変調を制御するために製作したソフトウェアのスクリーンショット．任意のビットマップ画像内の任意の 768px × 768px の領域をディスプレイの中央に表示する．左上のパネル部分やマウスによるドラッグで表示領域を，すなわち特異点の位置を px 単位で調整できる．

参考文献

[1] C. Cohen-Tannoudji, J. Dupont-Roc, and G. Grynberg, *Atom-Photon Interactions: Basic Processes and Applications* (Wiley-Interscience, Weinheim, 1998).

[2] D. ウォールス and G. ミルバーン, 量子光学 (シュプリンガー・フェアラーク東京, 東京, 2000).

[3] M. A. Nielsen and I. L. Chuang, *Quantum Computation and Quantum Information* (Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2000).

[4] A. Einstein, B. Podolsky, and N. Rosen, “Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality Be Considered Complete?” Phys. Rev. **47**, 777 (1935).

[5] J. S. Bell, “On the Problem of Hidden Variables in Quantum Mechanics” Rev. Mod. Phys. **38**, 447 (1966).

[6] J. F. Clauser, M. A. Horne, A. Shimony, and R. A. Holt, “Proposed Experiment to Test Local Hidden-Variable Theories” Phys. Rev. Lett. **23**, 880 (1969).

[7] A. Aspect, P. Grangier, and G. Roger, “Experimental Tests of Realistic Local Theories via Bell’s Theorem” Phys. Rev. Lett. **47**, 460 (1981).

[8] A. Aspect, J. Dalibard, and G. Roger, “Experimental Test of Bell’s Inequalities Using Time- Varying Analyzers” Phys. Rev. Lett. **49**, 1804 (1982).

[9] 林 正人, 量子情報理論入門 (サイエンス社, 東京, 2004).

[10] C. E. Shannon, “A mathematical theory of communication” SIGMOBILE Mob. Comput. Commun. Rev. **5**, 3 (2001).

[11] M. Ozawa, “Quantum measuring processes of continuous observables” Journal of Mathematical Physics **25**, 79 (1984).

[12] N. Gisin, G. Ribordy, W. Tittel, and H. Zbinden, “Quantum cryptography” Rev. Mod. Phys. **74**, 145 (2002).

[13] C. H. Bennett and S. J. Wiesner, “Communication via one- and two-particle operators on Einstein-Podolsky-Rosen states” Phys. Rev. Lett. **69**, 2881 (1992).

[14] C. H. Bennett *et al.*, “Teleporting an unknown quantum state via dual classical

and Einstein-Podolsky-Rosen channels" Phys. Rev. Lett. **70**, 1895 (1993).

[15] P. W. Shor, "Scheme for reducing decoherence in quantum computer memory" Phys. Rev. A **52**, R2493 (1995).

[16] C. H. Bennett, D. P. DiVincenzo, J. A. Smolin, and W. K. Wootters, "Mixed-state entanglement and quantum error correction" Phys. Rev. A **54**, 3824 (1996).

[17] S. Hill and W. K. Wootters, "Entanglement of a Pair of Quantum Bits" Phys. Rev. Lett. **78**, 5022 (1997).

[18] W. K. Wootters, "Entanglement of Formation of an Arbitrary State of Two Qubits" Phys. Rev. Lett. **80**, 2245 (1998).

[19] M. Horodecki, P. Horodecki, and R. Horodecki, "Mixed-State Entanglement and Distillation: Is there a "Bound" Entanglement in Nature?" Phys. Rev. Lett. **80**, 5239 (1998).

[20] V. Coffman, J. Kundu, and W. K. Wootters, "Distributed entanglement" Phys. Rev. A **61**, 052306 (2000).

[21] P. G. Kwiat *et al.*, "New High-Intensity Source of Polarization-Entangled Photon Pairs" Phys. Rev. Lett. **75**, 4337 (1995).

[22] K. Mattle, H. Weinfurter, P. G. Kwiat, and A. Zeilinger, "Dense Coding in Experimental Quantum Communication" Phys. Rev. Lett. **76**, 4656 (1996).

[23] D. Bouwmeester *et al.*, "Experimental quantum teleportation" Nature **390**, 575 (1997).

[24] H. Briegel, W. Dr, J. I. Cirac, and P. Zoller, "Quantum Repeaters: The Role of Imperfect Local Operations in Quantum Communication" Phys. Rev. Lett. **81**, 5932 (1998).

[25] C. H. Bennett, H. J. Bernstein, S. Popescu, and B. Schumacher, "Concentrating partial entanglement by local operations" Phys. Rev. A **53**, 2046 (1996).

[26] Z. Zhao, J. Pan, and M. S. Zhan, "Practical scheme for entanglement concentration" Phys. Rev. A **64**, 014301 (2001).

[27] H. J. Kimble, "The quantum internet" Nature **453**, 1023 (2008).

[28] M. Fleischhauer and M. D. Lukin, "Quantum memory for photons: Dark-state polaritons" Phys. Rev. A **65**, 022314 (2002).

[29] L. M. K. Vandersypen and I. L. Chuang, "NMR techniques for quantum control and computation" Rev. Mod. Phys. **76**, 1037 (2005).

[30] S. M. Reimann and M. Manninen, "Electronic structure of quantum dots" Rev. Mod. Phys. **74**, 1283 (2002).

[31] Y. Makhlin, G. Schn, and A. Shnirman, "Quantum-state engineering with Josephson-junction devices" Rev. Mod. Phys. **73**, 357 (2001).

[32] L. Duan, M. D. Lukin, J. I. Cirac, and P. Zoller, "Long-distance quantum communication with atomic ensembles and linear optics" Nature **414**, 413 (2001).

[33] A. Kuzmich *et al.*, "Generation of nonclassical photon pairs for scalable quantum communication with atomic ensembles" Nature **423**, 731 (2003).

[34] D. N. Matsukevich *et al.*, "Entanglement of a Photon and a Collective Atomic Excitation" Phys. Rev. Lett. **95**, 040405 (2005).

[35] C. W. Chou *et al.*, "Measurement-induced entanglement for excitation stored in remote atomic ensembles" Nature **438**, 828 (2005).

[36] T. Chaneliere *et al.*, "Storage and retrieval of single photons transmitted between remote quantum memories" Nature **438**, 833 (2005).

[37] D. N. Matsukevich *et al.*, "Entanglement of Remote Atomic Qubits" Phys. Rev. Lett. **96**, 030405 (2006).

[38] J. H. Poynting, "On Pressure Perpendicular to the Shear Planes in Finite Pure Shears, and on the Lengthening of Loaded Wires When Twisted" Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical and Physical Character **82**, 546 (1909).

[39] R. A. Beth, "Mechanical Detection and Measurement of the Angular Momentum of Light" Phys. Rev. **50**, 115 (1936).

[40] L. Allen, M. W. Beijersbergen, R. J. C. Spreeuw, and J. P. Woerdman, "Orbital angular momentum of light and the transformation of Laguerre-Gaussian laser modes" Phys. Rev. A **45**, 8185 (1992).

[41] H. He, M. E. J. Friese, N. R. Heckenberg, and H. Rubinsztein-Dunlop, "Direct Observation of Transfer of Angular Momentum to Absorptive Particles from a Laser Beam with a Phase Singularity" Phys. Rev. Lett. **75**, 826 (1995).

[42] D. G. Grier, "A revolution in optical manipulation" Nature **424**, 810 (2003).

[43] K. Ladavac and D. Grier, "Microoptomechanical pumps assembled and driven by holographic optical vortex arrays" Optics Express **12**, 1144 (2004).

[44] L. Torner, J. Torres, and S. Carrasco, "Digital spiral imaging" Optics Express **13**, 873 (2005).

[45] G. F. Calvo, A. Picon, and E. Bagan, "Quantum field theory of photons with orbital angular momentum" Phys. Rev. A **73**, 013805 (2006).

[46] A. Mair, A. Vaziri, G. Weihs, and A. Zeilinger, "Entanglement of the orbital angular momentum states of photons" Nature **412**, 313 (2001).

[47] A. Vaziri, G. Weihs, and A. Zeilinger, "Experimental Two-Photon, Three-Dimensional Entanglement for Quantum Communication" Phys. Rev. Lett. **89**, 240401 (2002).

[48] A. Vaziri *et al.*, "Concentration of Higher Dimensional Entanglement: Qutrits of Photon Orbital Angular Momentum" Phys. Rev. Lett. **91**, 227902 (2003).

[49] N. K. Langford *et al.*, "Measuring Entangled Qutrits and Their Use for Quantum Bit Commitment" Phys. Rev. Lett. **93**, 053601 (2004).

[50] J. T. Barreiro, N. K. Langford, N. A. Peters, and P. G. Kwiat, "Generation of Hyperentangled Photon Pairs" Phys. Rev. Lett. **95**, 260501 (2005).

[51] T. Wei, J. T. Barreiro, and P. G. Kwiat, "Hyperentangled Bell-state analysis" Phys. Rev. A **75**, 060305 (2007).

[52] D. Collins *et al.*, "Bell Inequalities for Arbitrarily High-Dimensional Systems" Phys. Rev. Lett. **88**, 040404 (2002).

[53] D. Kaszlikowski *et al.*, "Violations of Local Realism by Two Entangled N-Dimensional Systems Are Stronger than for Two Qubits" Phys. Rev. Lett. **85**, 4418 (2000).

[54] M. Bourennane, A. Karlsson, and G. Björk, "Quantum key distribution using multilevel encoding" Phys. Rev. A **64**, 012306 (2001).

[55] D. Bruß and C. Macchiavello, "Optimal Eavesdropping in Cryptography with Three-Dimensional Quantum States" Phys. Rev. Lett. **88**, 127901 (2002).

[56] C. Li-Bing, L. Hong, and J. Rui-Bo, "Remote interactions between two d-dimensional distributed quantum systems: nonlocal generalized quantum control-NOT gate and entanglement swapping" Chinese Physics **16**, 3204 (2007).

[57] J. W. R. Tabosa and D. V. Petrov, "Optical Pumping of Orbital Angular Momentum of Light in Cold Cesium Atoms" Phys. Rev. Lett. **83**, 4967 (1999).

[58] R. Pugatch *et al.*, "Topological Stability of Stored Optical Vortices" Phys. Rev. Lett. **98**, 203601 (2007).

[59] M. Shuker *et al.*, "Storing Images in Warm Atomic Vapor" Phys. Rev. Lett. **100**, 223601 (2008).

[60] D. Moretti, D. Felinto, and J. W. R. Tabosa, "Collapses and revivals of stored orbital angular momentum of light in a cold-atom ensemble" Phys. Rev. A **79**, 023825 (2009).

[61] 上田 正仁, 現代量子物理学—基礎と応用— (培風館, 東京, 2004).

[62] C. C. Gerry and J. H. Eberly, "Dynamics of a Raman coupled model interacting

with two quantized cavity fields" Phys. Rev. A **42**, 6805 (1990).

[63] 桜井 純, 現代の量子力学〈下〉 (吉岡書店, 東京, 1989).

[64] C. W. Chou, S. V. Polyakov, A. Kuzmich, and H. J. Kimble, "Single-Photon Generation from Stored Excitation in an Atomic Ensemble" Phys. Rev. Lett. **92**, 213601 (2004).

[65] S. V. Polyakov, C. W. Chou, D. Felinto, and H. J. Kimble, "Temporal Dynamics of Photon Pairs Generated by an Atomic Ensemble" Phys. Rev. Lett. **93**, 263601 (2004).

[66] R. Zhao *et al.*, "Long-lived quantum memory" Nature Physics **5**, 100 (2008).

[67] D. A. Braje *et al.*, "Frequency Mixing Using Electromagnetically Induced Transparency in Cold Atoms" Phys. Rev. Lett. **93**, 183601 (2004).

[68] P. Kolchin *et al.*, "Generation of Narrow-Bandwidth Paired Photons: Use of a Single Driving Laser" Phys. Rev. Lett. **97**, 113602 (2006).

[69] Q. Chen, B. Shi, Y. Zhang, and G. Guo, "Entanglement of the orbital angular momentum states of the photon pairs generated in a hot atomic ensemble" Phys. Rev. A **78**, 053810 (2008).

[70] H. Bechmann-Pasquinucci and A. Peres, "Quantum Cryptography with 3-State Systems" Phys. Rev. Lett. **85**, 3313 (2000).

[71] J. Wen and M. H. Rubin, "Theory of two-photon interference in an electromagnetically induced transparency system" Phys. Rev. A **70**, 063806 (2004).

[72] K. Akiba, K. Kashiwagi, M. Arikawa, and M. Kozuma, "Storage and retrieval of nonclassical photon pairs and conditional single photons generated by the parametric down-conversion process" New Journal of Physics **11**, 013049 (2009).

[73] R. Inoue *et al.*, "Entanglement of orbital angular momentum states between an ensemble of cold atoms and a photon" Phys. Rev. A **74**, 053809 (2006).

[74] D. F. V. James, P. G. Kwiat, W. J. Munro, and A. G. White, "Measurement of qubits" Phys. Rev. A **64**, 052312 (2001).

[75] J. P. Torres, A. Alexandrescu, and L. Torner, "Quantum spiral bandwidth of entangled two-photon states" Phys. Rev. A **68**, 050301 (2003).

[76] R. Loudon, 光の量子論 (内田老鶴圃, 東京, 1994).

[77] J. F. Clauser, "Experimental distinction between the quantum and classical field-theoretic predictions for the photoelectric effect" Phys. Rev. D **9**, 853 (1974).

[78] P. Grangier, G. Roger, and A. Aspect, "Experimental Evidence for a Photon Anticorrelation Effect on a Beam Splitter: A New Light on Single-Photon In-

terferences" EPL (Europhysics Letters) **1**, 173 (1986).

[79] P. G. Kwiat and R. Y. Chiao, "Observation of a nonclassical Berry\char39s phase for the photon" Phys. Rev. Lett. **66**, 588 (1991).

[80] E. Knill, R. Laflamme, and G. J. Milburn, "A scheme for efficient quantum computation with linear optics" Nature **409**, 46 (2001).

[81] C. Santori *et al.*, "Triggered Single Photons from a Quantum Dot" Phys. Rev. Lett. **86**, 1502 (2001).

[82] P. Michler *et al.*, "A Quantum Dot Single-Photon Turnstile Device" Science **290**, 2282 (2000).

[83] A. Kuhn, M. Hennrich, and G. Rempe, "Deterministic Single-Photon Source for Distributed Quantum Networking" Phys. Rev. Lett. **89**, 067901 (2002).

[84] M. Keller *et al.*, "Continuous generation of single photons with controlled waveform in an ion-trap cavity system" Nature **431**, 1075 (2004).

[85] C. Kurtsiefer, S. Mayer, P. Zarda, and H. Weinfurter, "Stable Solid-State Source of Single Photons" Phys. Rev. Lett. **85**, 290 (2000).

[86] S. Chen *et al.*, "Deterministic and Storable Single-Photon Source Based on a Quantum Memory" Phys. Rev. Lett. **97**, 173004 (2006).

[87] B. M. Terhal and P. Horodecki, "Schmidt number for density matrices" Phys. Rev. A **61**, 040301 (2000).

[88] E. Yao *et al.*, "Observation of quantum entanglement using spatial light modulators" Optics Express **14**, 13089 (2006).

[89] V. Balic *et al.*, "Generation of Paired Photons with Controllable Waveforms" Phys. Rev. Lett. **94**, 183601 (2005).

[90] C. I. Osorio, S. Barreiro, M. W. Mitchell, and J. P. Torres, "Spatial entanglement of paired photons generated in cold atomic ensembles" Phys. Rev. A **78**, 052301 (2008).

[91] M. F. Andersen *et al.*, "Quantized Rotation of Atoms from Photons with Orbital Angular Momentum" Phys. Rev. Lett. **97**, 170406 (2006).

[92] Y. Kawaguchi, H. Saito, and M. Ueda, "Spontaneous Circulation in Ground-State Spinor Dipolar Bose-Einstein Condensates" Phys. Rev. Lett. **97**, 130404 (2006).

[93] Y. Kawaguchi, H. Saito, and M. Ueda, "Can Spinor Dipolar Effects Be Observed in Bose-Einstein Condensates?" Phys. Rev. Lett. **98**, 110406 (2007).

[94] S. Franke-Arnold, L. Allen, and M. Padgett, "Advances in optical angular momentum" Laser & Photonics Review **2**, 299 (2008).

[95] S. M. Barnett, “Optical angular-momentum flux*” Journal of Optics B: Quantum and Semiclassical Optics **4**, S7 (2002).

[96] 松岡 正浩, 阿部 龍蔵, 川村 清, 量子光学 (裳華房, 東京, 2000).

[97] B. E. A. Saleh and M. C. Teich, 基本 光工学 1 (森北出版, 東京, 2006).

[98] I. Novikova, N. B. Phillips, and A. V. Gorshkov, “Optimal light storage with full pulse-shape control” Phys. Rev. A **78**, 021802 (2008).

[99] A. Vaziri, G. Weihs, and A. Zeilinger, “Superpositions of the orbital angular momentum for applications in quantum experiments” Journal of Optics B: Quantum and Semiclassical Optics **4**, S47 (2002).

[100] M. Takeda, H. Ina, and S. Kobayashi, “Fourier-transform method of fringe-pattern analysis for computer-based topography and interferometry” Journal of the Optical Society of America, vol. 72, issue 1, p.156 **72**, 156 (1982).

[101] K. Usami *et al.*, “Accuracy of quantum-state estimation utilizing Akaike’s information criterion” Phys. Rev. A **68**, 022314 (2003).

[102] R. T. Thew, K. Nemoto, A. G. White, and W. J. Munro, “Qudit quantum-state tomography” Phys. Rev. A **66**, 012303 (2002).

[103] H. Akaike, “A new look at the statistical model identification” Automatic Control, IEEE Transactions on **19**, 716 (1974).

[104] A. Sanpera, D. Bruß, and M. Lewenstein, “Schmidt-number witnesses and bound entanglement” Phys. Rev. A **63**, 050301 (2001).

[105] B. E. A. Saleh and M. C. Teich, 基本 光工学 2 (森北出版, 東京, 2008).

[106] M. Kourogi *et al.*, “Accurate relative frequency cancellation between two independent lasers” Optics Letters **24**, 16 (1999).

学術発表リスト

1. 論文

1. R. Inoue, N. Kanai, T. Yonehara, Y. Miyamoto, M. Koashi, and M. Kozuma; *Entanglement of Orbital Angular Momentum Stateas between an Ensemble of Cold Atoms and a Photon*; Physical Review A 74, 053809 (2006).
2. R. Inoue, T. Yonehara, Y. Miyamoto, M. Koashi, and M. Kozuma; *Measuring Qutrit-Qutrit Entanglement of Orbital Angular Momentum States of an Atomic Ensemble and a Photon*; Physical Review Letters 103, 110503 (2009).

2. 国際会議

1. R. Inoue, N. Kanai, T. Yonehara, Y. Miyamoto, M. Koashi, and M. Kozuma; *Entanglement of Orbital Angular Momentum Stateas between an Ensemble of Cold Atoms and a Photon*; XX International Conference on Atomic Physics (Innsbruck, Austria, July 2006).
2. R. Inoue, T. Yonehara, Y. Miyamoto, M. Koashi, and M. Kozuma; *Estimation of Three-Dimensional Entanglement between an Atomic Ensemble and a Photon*; Quantum-Atom Optics Downunder (Wollongong, Australia, December 2007).
3. R. Inoue, T. Yonehara, Y. Miyamoto, M. Koashi, M. Kozuma; *Atoms-Photon Entanglement of Orbital Angular Momentum States*; International Symposium on Physics of Quantum Technology (Nara, Japan, November 2008).
4. R. Inoue; *Entanglement of Orbital Angular Momentum States as Resource for Quantum Networks*; International Symposium on Topological Science and Technology for Young Researchers 2009 (Hokkaido, Japan, March 2009).

3. 国内会議

1. 金井紀文，井上遼太郎，米原健矢，上妻幹旺；冷却原子集団内に励起した対称集団状態を利用した非古典相関光子対の生成；日本物理学会第 61 回年次大会（松山大学，2006 年 3 月）.
2. 井上遼太郎，金井紀文，米原健矢，宮本洋子，小芦雅斗，上妻幹旺；冷却原子集団と光の軌道角運動量相関；日本物理学会第 61 回年次大会（松山大学，2006 年 3 月）.
3. 井上遼太郎，米原健矢，宮本洋子，小芦雅斗，上妻幹旺；原子集団- 光子間多次元エンタングルメントの評価；日本物理学会第 62 回年次大会（北海道大学，2007 年 9 月）.
4. 井上遼太郎；軌道角運動量に関する 2 者間 3 次元エンタングルメントの評価方法；東京工業大学 21 世紀 COE プログラム「量子ナノ物理学」第 3 回公開シンポジウム（五反田ゆうぽうと、2007 年 12 月）
5. 井上遼太郎，米原健矢，宮本洋子，小芦雅斗，上妻幹旺；原子集団- 光子間軌道角運動量エンタングルメントにおける多次元性の評価；日本物理学会第 63 回年次大会（近畿大学，2008 年 3 月）.
6. 野口篤史，井上遼太郎，米原健矢，上妻幹旺；冷却原子集団を用いた単一光子の生成；日本物理学会第 64 回年次大会（立教大学，2009 年 3 月）.

謝辞

本論文は，東京工業大学大学院理工学研究科物性物理学専攻上妻研究室において博士課程在学中に行った研究をまとめたものです．本研究の遂行にあたって多くの方から御指導，御助言をいただきました．ここに深く御礼申しあげます．

本論文は，上妻幹旺准教授，金森英人准教授，藤澤利正教授，細谷曉夫教授，松下道雄准教授により審査されたものです．審査員の先生方には本論文のために時間を割いていただき，有益な議論の機会をいただいたことに感謝いたします．

指導教員である上妻幹旺准教授には学部 4 年生から 6 年間にわたり，実験の基礎的な技術をはじめ，研究の様々な点で熱心に御指導をいただきました．特に博士課程では，自由に研究させていただいた上でことあるごとに適切な御助言もいただきました．大阪大学の小芦雅斗准教授には，特にエンタングルメントの評価に関して深い見地から多岐にわたる御指摘・御助言をいただきました．電気通信大学の宮本洋子助教には，位相ホログラムを提供していただいた上，光の軌道角運動量状態を用いた研究を行う上で様々な御助言をいただきました．先生方の指導のお陰で研究者として成長できたことを実感しております．ありがとうございました．

上妻研究室のメンバーには様々な点で御世話になりました．金井紀文氏，米原健矢氏，野口篤史氏とは共同で実験研究を行い，共通の目標の実現に向けて努力する中で様々なことを学ばせていただきました．本多和仁助教，宇佐見康二博士，赤松大輔博士，秋葉圭一郎博士，衛藤雄二郎博士とは研究テーマが異なる中で様々な議論を交わし，専門的な知識を学びとることができました．また，彼らの研究に対する姿勢・熱意は私にとって良い刺激になりました．

日本学術振興会の特別研究員制度により，円滑に研究を遂行することができました．感謝いたします．また，9 年間の学生生活を支えてくださった両親に感謝いたします．

本研究は，ここに書ききれなかった方を含めた皆様の御支援の上に成り立ったものです．御指導・御協力いただいた皆様に，改めて深い感謝の意を表します．

2010 年 1 月　井上遼太郎